Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

УДК 512.544

Єна Олександр Григорович

Централізатори диференціювань і замкнені раціональні функції від двох змінних

(01.01.06 — алгебра та теорія чисел)

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
професор Петравчук Анатолій Петрович

Київ – 2008

Зміст

Перелік умовних позначень

$\operatorname{char} \Bbbk$ характеристика поля $\Bbbk$

$\overline{\Bbbk}$ алгебраїчне замикання поля $\Bbbk$

$\deg f$ степінь многочлена f

$Z(L)$ центр алгебри Лі L

$\Bbbk^*$ мультиплікативна група поля $\Bbbk$

$\mathrm{div} D$ дивергенція диференціювання D

$\operatorname{tr.deg}_{\Bbbk}(L)$ ступінь трансцендентності поля L над полем $\Bbbk$

$\mathrm{Der}(L)$ алгебра диференціювань алгебри Лі L

$\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ алгебра многочленів від n змінних над полем $\Bbbk$.

$\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ поле раціональних функцій від n змінних над полем $\Bbbk$.

$\Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ алгебра формальних степеневих рядів від n змінних над полем $\Bbbk$.

$\Bbbk[f_1, \ldots, f_k]$ підалгебра алгебри многочленів, яка породжена многочленами $f_1, \ldots, f_k$

$[L : K]$ степінь розширення (поля L над полем K)

$J(f, g)$ матриця Якобі многочленів $f, g \in \Bbbk[x, y]$

$\gcd(f, g)$ найбільший спільний дільник елементів f, g деякого евклідового кільця

$V_\lambda(D)$ кореневий підпростір лінійного оператора D, який відповідає власному числу λ.

$\mathbb{P}^1(\Bbbk)$ проективна пряма над полем $\Bbbk$

Вступ

Актуальність теми. Дослідження алгебр Лі диференціювань асоціативних кілець, зокрема, кілець многочленів від кількох змінних складають цілий розділ сучасної алгебри, який тісно пов'язаний з теорією диференціальних рівнянь, як звичайних, так і в частинних похідних, з геометрією, зокрема, групами Лі та алгебраїчними групами (часто нескінченновимірними), з математичним аналізом (теорією лінійних диференціальних операторів). Це пов'язано з тією обставиною, що довільне диференціювання D кільця многочленів $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, де $\mathbb{k}$ довільне поле, має вигляд $D = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$, де коефіцієнти $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ належать кільцю $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, тобто D є лінійним диференціальним оператором з поліноміальними коефіцієнтами. Ядро цього оператора складають розв'язки відповідного диференціального рівняння в частинних похідних з поліноміальними коефіцієнтами, що пов'язує алгебраїчну теорію з відповідними розділами теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних. Комутатор двох диференціювань $D_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$ і $D_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$ є знову диференціюванням кільця многочленів $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, і, як відомо, відносно операції комутування векторний простір $\mathrm{Der}(\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n])$ утворює алгебру Лі. В алгебрі Лі $W_n = \mathrm{Der}(\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n])$ можна виділити цілий ряд підалгебр, які пов'язані з дією диференціювань на певні диференціальні форми, ця тематика розроблялася в відомих роботах Картана, іменем якого і названі серії алгебр Лі (див. [11]). Основним об'єктом дослідження в дисертаційній роботі є алгебра Лі диференціювань кільця многочленів $\Bbbk[x, y]$ від двох змінних з нульовою дивергенцією, тобто таких диференціювань D які мають вигляд $D = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ де $\operatorname{div} D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Ця алгебра Лі називається спеціальною афінною алгеброю Лі і позначається $sa_2(\Bbbk)$, оскільки як показано в роботі І.Р.Шафаревича [55] є алгеброю Лі нескінченновимірної алгебраїчної групи $SA_2(\Bbbk)$ всіх автоморфізмів кільця многочленів $\Bbbk[x, y]$ з одиничним якобіаном (нагадаємо, що автоморфізм θ цього кільця задається парою многочленів $F(x, y), G(x, y)$, в які переходять x і y таких, що $\det J(F, G) \in \Bbbk^*$. Основні результати дисертаційної роботи - опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $sa_2(\Bbbk)$. Цей опис вимагає достатньо багато інформації про деякі види многочленів від кількох змінних - так звані замкнені многочлени. Окрім замкнених многочленів вивчаються в роботі також замкнені раціональні функції від кількох змінних (це є насправді твірні максимальних підполів степеня трансцендентності 1 в полі раціональних функцій). Відзначимо, що замкнені многочлени і замкнені раціональні функції вивчались багатьма авторами (А. Новіцкі [41], М. Олланіер [46], М. Аяд [4, 5], А. Боден [9, 10], Е. Циган [12] та інші) в зв'язку з іншими питаннями, пов'язаними переважно з деякими проблемами комутативної алгебри, теорії чисел та теорії динамічних систем.

В дисертаційній роботі вивчаються також окремі диференціювання кільця многочленів $\Bbbk[x, y]$ та поля раціональних функцій $\Bbbk(x, y)$, оскільки багато питань з теорії алгебр Лі зводиться до будови кільця констант таких диференціювань. З цієї точки зору диференціювання вивчались рядом авторів, однією з перших тут була робота О.Зариського [64]. Дослідженню підкілець констант диференціювань асоціативних комутативних кілець присвячено роботи А.Новіцкі [42], [44] та інших авторів [45], [19], [6]. Основною тут є робота А.Новіцкі і М.Нагати [43], результати якої суттєво використовуються в даній дисертаційній роботі.

Окрім алгебр Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних в дисертаційній роботі розглядаються аналогічні алгебри Лі диференціювань кільця формальних степеневих рядів від двох змінних. Використовуючи результати А.Плоскі [51] отримано також подібний опис для централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $sa_2^{\mathrm{pow}}(\Bbbk)$.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках держбюджетної дослідницької теми 06БФ038 "Розробка алгебраїчних і геометричних методів дослідження з використанням комбінаторних та категорних підходів що виконується на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0106U005862).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних з нульовою дивергенцією та детальне вивчення замкнених многочленів та замкнених раціональних функцій від кількох змінних, в термінах яких отримано зазначений вище опис.

Об'єктом дослідження є алгебра Лі $sa_2(\Bbbk)$ всіх диференціювань з нульовою дивергенцією кільця многочленів від двох змінних та замкнені многочлени і раціональні функції від кількох змінних.

Предмет дослідження - централізатори елементів та максимальні абелеві підалгебри алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$, твірні максимальних підполів поля раціональних функцій від кількох змінних та цілозамкнені підкільця кільця многочленів від кількох змінних.

Методи дослідження. Основними методами,що використовуються у дослідженні є методи теорії алгебр Лі та методи комутативної алгебри, які пов'язані з цілими розширеннями комутативних кілець.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

1) дано повний опис централізаторів елементів в алгебрі Лі $sa_2(\Bbbk)$ всіх диференціювань кільця многочленів $\Bbbk[x, y]$ з нульовою дивергенцією у випадку основного поля нульової характеристики;

2) описано всі максимальні абелеві підалгебри алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$ у випадку основного поля нульової характеристики;

3) описано структуру просторів поліноміальних розв'язків диференціальних рівнянь $D(g) = ag$, $D \in sa_2(\Bbbk)$;

4) отримано опис будови алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$ у випадку основного поля простої характеристики $p > 0$;

5) отримано аналогічні результати для алгебр Лі формальних степеневих рядів;

6) вказано достатні умови для того, щоб задана раціональна функція від кількох змінних була замкненою.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії алгебр Лі, комутативній алгебрі, теорії трансцендентних розширень полів раціональних функцій та суміжних розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що ввійшли в дисертаційну роботу, одержані самостійно, або за особистою участю автора. А саме: основні теореми 3.2.8, 4.2.4, 4.3.8, 4.3.9, 5.1.9, дисертаційної роботи отримано автором самостійно. Теореми 3.3.2, 5.1.3 отримано спільно з А.П.Петравчуком при рівному й нероздільному внеску співавторів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися

- на П'ятій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Одеса, липень 2005 р.);
- на Міжнародній алгебраїчній конференції з теорії радикалів ICOR-2006 (Київ, липень-серпень 2006 р.);
- на Шостій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Кам'янець-Подільський, липень 2007 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 8 наукових роботах. З них 4 — це статті [48, 28, 50, 30] у фахових виданнях та 4 — публікації у матеріалах та тезах конференцій [47, 27, 29, 49].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 117 сторінок, з них список використаних джерел займає місце з 111 по 117 сторінку і містить 64 найменувань.

Основний зміст роботи. Основна частина роботи складається із п'яти розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст підрозділів даного розділу.

У **першому розділі** проводиться огляд літератури, пов'язаної з тематикою досліджень, що проводилася здобувачем.

У **другому розділі** подано необхідні означення та деякі допоміжні результати, які використовуються в подальшому викладі результатів роботи.

У **третьому розділі** досліджуються замкнені раціональні функції і многочлени. Нехай $\mathbb{k}$ - довільне поле характеристики 0. Нагадаємо, що многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ називається *замкненим*, якщо підалгебра $\mathbb{k}[f]$ цілозамкнена в $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Множина замкнених многочленів співпадає з множиною таких многочленів f, для яких підалгебра $\Bbbk[f]$ є максимальним елементом в частково впорядкованій за включенням множині

$$\mathcal{M} = \{\Bbbk[h] \mid h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk\}.$$

Прикладом замкнених многочленів є многочлени, які утворюють якобієву пару, тобто такі многочлени $f,\ g \in \Bbbk[x, y]$, що виконується $\det J(f, g) \in \Bbbk^*$, де $J(f, g)$ - матриця Якобі многочленів $f,\ g$. У випадку алгебраїчно замкненого поля усі незвідні многочлени є також замкненими.

Многочлен h називається *породжуючим* для многочлена f, якщо h замкнений і якщо $f \in \Bbbk[h]$, тобто якщо $f = F(h)$ для деякого $F(t) \in \Bbbk[t]$. Породжуючий многочлен завжди існує, до того ж визначений однозначно з точністю до афінного перетворення, тобто якщо $h_1,\ h_2$ два породжуючих многочлени многочлена f, тоді існують константи $c_1 \in \Bbbk^*$, $c_2 \in \Bbbk$, такі що $h_2 = c_1 h_1 + c_2$.

Раціональна функція $\varphi \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n) \setminus \Bbbk$ називається *замкненою*, якщо підполе $\Bbbk(\varphi)$ алгебраїчно замкнене в $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$.

Раціональна функція $\tilde{\psi}$ називається *породжуючою* для раціональної функції ψ, якщо $\tilde{\psi}$ замкнена і $\psi \in \Bbbk(\tilde{\psi})$. Основні результати третього розділу містяться в наступних теоремах:

Теорема 3.2.8. *Нехай поле $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$ алгебраїчно замкнене. Нехай многочлени $f, g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ взаємно прості і алгебраїчно незалежні. Якщо хоча б один з них незвідний, то раціональна функція $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена.*

Теорема 3.3.2. *Нехай многочлени $f, g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ взаємно прості і хоча б один з них не є сталим многочленом. Тоді раціональна функція $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена тоді і лише тоді, коли у пучку гіперповерхонь $\alpha f + \beta g$ усі крім, можливо, скінченного числа гіперповерхні є незвідними.*

Четвертий розділ присвячено дослідженню структури алгебр Лі типу $P_2(\Bbbk)$, тобто алгебр Лі многочленів, раціональних функцій та рядів від двох змінних із дужкою Лі, що визначається якобіаном $[f,g] = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$. Перша частина цього розділу присвячена випадку характеристики нуль, у другій частині досліджується структура алгебр $P_2(\mathbb{k})$ та $\widetilde{P_2}(\mathbb{k})$ у простій характеристиці. В наступній теоремі дано опис простору узагальнених власних функцій внутрішніх диференціювань алгебри Лі $P_2(\mathbb{k})$.

Теорема 4.2.4. *Нехай $a, f \in \mathbb{k}[x,y]$, $a \neq 0$, $V_a(f) \neq 0$. Тоді існує $g_{a,f} \in \mathbb{k}[x,y]$, такий що $V_a(f) = g_{a,f}\mathbb{k}[\bar{f}]$ і $g_{a,f}$ не ділиться на елементи з $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) = \mathbb{k}[\bar{f}]$. Зокрема, $V_a(f)$ нескінченновимірний векторний простір над полем $\mathbb{k}$ і вільний модуль рангу 1 над централізатором $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$ многочлена f.*

Аналогічні результати можна отримати для алгебр Лі, побудованих на кільцях формальних степеневих рядів від двох змінних. Для зручності будемо називати формальний степеневий ряд $f \in \mathbb{k}[[x,y]]$ *максимальним*, якщо алгебра $\mathbb{k}[[f]]$ є максимальним елементом у частково впорядкованій за включенням множині

$$\{\mathbb{k}[[h]] \mid h \in \mathbb{k}[[x,y]]\}.$$

Максимальні ряди є аналогами замкнених многочленів і раціональних функцій.

Ряд h називається *породжуючим* рядом для ряду f, якщо h максимальний і $f \in \mathbb{k}[[h]]$. Породжуючий ряд завжди існує.

Твердження 4.2.12. *Нехай $f \in \mathbb{k}[[x,y]] \setminus \mathbb{k}$. Тоді $C_{\mathbb{k}[[x,y]]}(f) = \mathbb{k}[[h]]$ для довільного породжуючого для f ряду h.*

Твердження 4.2.14. *Максимальними абелевими підалгебрами в $\mathbb{k}[[x,y]]$ є в точності однопороджені підалгебри $\mathbb{k}[[h]]$, породжені максимальним рядом h.*

Якщо характеристика основного поля більша від нуля, маємо цілковито іншу структуру централізаторів і максимальних абелевих підалгебр в алгебрах $P_2(\mathbb{k})$ та $\widetilde{P_2}(\mathbb{k})$. Вона вказана в наступних твердженнях

Теорема 4.3.8. *Нехай* $f \in \mathbb{k}[x,y] \backslash \mathbb{k}[x^p, y^p]$. *Тоді* $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) = \mathbb{k}[x^p, y^p, h_1, \dots h_{p-1}]$ *є вільним модулем рангу* p *над* $\mathbb{k}[x^p, y^p]$, *де* h_i *є вільними твірними, що мають вигляд*

$$g^{-1}(a_0 + a_2 f + \dots + a_{p-1} f^{p-1}),$$

$g, a_i \in \mathbb{k}[x^p, y^p]$, $i = \overline{0, p-1}$.

Теорема 4.3.9. *1) Нехай* A *максимальна абелева підалгебра в алгебрі Лі* $P_2(\mathbb{k})$. *Тоді* A *збігається з централізатором* $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$ *для деякого* $f \in A \setminus \mathbb{k}[x^p, y^p]$. *Навпаки, для довільного* $f \in P_2(\mathbb{k}) \setminus \mathbb{k}[x^p, y^p]$ *підалгебра* $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$ *є максимальною абелевою підалгеброю із* $P_2(\mathbb{k})$.

2) Максимальні абелеві підалгебри алгебри Лі $\widetilde{P_2}(\mathbb{k})$ *вичерпуються підполями* $\mathbb{k}(x^p, y^p, f)$, $f \in \widetilde{P_2}(\mathbb{k}) \setminus \mathbb{k}(x^p, y^p)$.

В останньому, **п'ятому розділі** досліджується структури алгебри Лі $sa_2(\mathbb{k})$ та алгебр, що подібні до неї, тобто алгебр Лі $\widetilde{sa_2}(\mathbb{k})$ та $sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$. У першій частині розглянуто випадок нульової характеристики, друга частина цього розділу присвячена простій характеристиці основного поля $\mathbb{k}$.

Теорема 5.1.3. *Нехай* $D = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ *– ненульовий елемент алгебри Лі* $sa_2(\mathbb{k})$. *Нехай* $f(x,y) \in \mathbb{k}[x,y]$ *такий многочлен, що* $\frac{\partial f}{\partial x} = Q(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -P(x,y)$ *і нехай* $\bar{f}$ *породжуючий многочлен многочлена* f. *Тоді*

1) якщо $f(x,y)$ *не многочлен Якобі, то*

$$C_{sa_2(\mathbb{k})}(D) = \mathbb{k}[\bar{f}]\left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

2) якщо $f(x,y)$ *многочлен Якобі і* $g(x,y)$ *такий многочлен, що* $\det(J(f,g)) \in \mathbb{k}^*$, *то*

$$C_{sa_2(\mathbb{k})}(D) = \mathbb{k}[f]\operatorname{ad} f + \mathbb{k}\operatorname{ad} g = \mathbb{k}[f]D + \mathbb{k}\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Теорема 5.1.9. *Нехай A максимальна абелева підалгебра алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$. Тоді*

1) якщо $\dim A = \infty$, то

$$A = \Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

де $f(x, y)$ замкнений многочлен.

Навпаки, для довільного замкненого многочлена f, алгебра

$$\Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

є максимальною абелевою підалгеброю в $sa_2(\Bbbk)$;

2) якщо $\dim A < \infty$ то

$$A = \Bbbk D_1 + \Bbbk D_2,$$

де $D_1 = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$, і $D_2 = -\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ для деякої пари многочленів f та g, таких що $[f, g] = \det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$.

Навпаки, для довільних многочленів f, g з умовою $\det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$ підалгебра

$$\Bbbk D_1 + \Bbbk D_2,$$

де D_1 і D_2 визначені як і вище, є максимальною абелевою підалгеброю в $sa_2(\Bbbk)$.

Ідея опису централізаторів, яка була використана для алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$, не працює повною мірою для алгебри $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$. Найбільше, що ми можемо зробити, це обмежитися образом гомоморфізму ad і описати централізатори та максимальні підалгебри для цієї достатньо великої підалгебри в $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$. Для рядів маємо аналогічні до Теорем 5.1.3 та 5.1.9 результати. В усіх формулюваннях потрібно лише замінити многочлени на ряди.

Розділ 1

Огляд літератури

Дослідження алгебр Лі диференціювань комутативних кілець, зокрема кілець многочленів від кількох змінних, складають важливий напрям в сучасній теорії алгебр Лі, який тісно пов'язаний з багатьма розділами алгебри, геометрії, теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики. Наприклад, з кожною алгебраїчною групою пов'язується відповідна їй алгебра Лі, яка в багатьох випадках є алгеброю Лі диференціювань і тому результати, отримані в теорії алгебр Лі можуть бути застосовані до алгебраїчних груп та груп Лі. Дослідження алгебр Лі диференціювань кілець многочленів розпочалися давно, але систематичного характеру вони набули після опублікування робіт Е.Картана (див. наприклад, [11]), який вивчаючи алгебри Лі диференціювань кілець степеневих рядів від кількох змінних ввів серії алгебр Лі картанівського типу, дослідження яких дуже вплинуло на подальший розвиток не тільки теорії алгебр Лі, але й алгебри в цілому. Основну роль тут відіграють чотири серії алгебр Лі над полем характеристики 0. Ці алгебри складаються з неперервних диференціювань кільця $k[[x_1, \dots, x_n]]$ формальних степеневих рядів, тобто з лінійних операторів вигляду

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in k[[x_1, \dots, x_n]].$$

Ці серії визначаються умовами:

1) Всі диференціювання кільця $k[[x_1, \dots, x_n]]$.

2) Всі диференціювання D, які задовольняють умову $D\omega = 0$, де $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ – диференціальна форма.

3) Всі диференціювання, які задовольняють при $n = 2k$ умові $D\omega = 0$, де ω – невироджена двовимірна диференціальна форма зі сталими коефіцієнтами, тобто

$$\omega = \sum \alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji},\ det(\alpha_{ij}) \neq 0.$$

4) Всі диференціювання, які задовольняють при $n = 2k+1$ умові $D\omega = f\omega$, де f - функція із $k[[x_1, \dots, x_n]]$, яка залежить від D, а ω – одновимірна диференціальна форма з поліноміальними коефіцієнтами степеня $\leqslant 1$ і невиродженим диференціалом $d\omega$.

Ці алгебри Лі в характеристиці 0 є простими, але вже в характеристиці $p > 0$ вони перестають бути простими, в кожній з таких алгебр Лі диференціювання $D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ з $f_i \in k[[x_1^p, \dots, x_n^p]]$ утворюють ідеал скінченної ковимірності. Відповідні фактор-алгебри можна описати як алгебри тих диференціювань кільця "зрізаних" многочленів $k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^p, \dots, x_n^p)$, які задовольняють умови типу 1) - 4). Алгебри Лі цих типів є p-алгебрами і вичерпують всі некласичні прості p-алгебри Лі в характеристиці $p > 5$. В своїй відомій роботі [34] А.І.Кострікін та І.Р.Шафаревич дослідили властивості таких алгебр Лі, показали їх простоту (при деяких природних обмеження) і висунули гіпотезу, що при достатньо великому простому числі p модулярні алгебри Лі є або класичними або належать до таких картанівських серій. Ця гіпотеза була підтверджена через багато років в серії робіт Г.Штраде, Р.Вільсона та інших математиків (див., наприклад, [61]). Алгебри Лі із серій 1) - 4) називаються відповідно загальною, спеціальною, гамільтоновою та контактною алгебрами і є одними з найбільш популярних об'єктів для дослідження в останні роки, оскільки багато питань не тільки з алгебри, але й з інших розділів математики пов'язані з алгебрами Лі картанівських серій.

Вкажемо один приклад застосування алгебр Лі диференціювань алгебри формальних степеневих рядів в геометрії. Якщо група G діє на множині S, то така дія називається примітивною у випадку, коли єдиними інваріантними відносно цієї дії відношеннями еквівалентності на S є відношення тотожності і тривіальне відношення (у якого всі елементи із S належать одному класу еквівалентності). Неважко показати, що примітивність дії групи G еквівалентна тому, що стабілізатор кожної точки множини S є максимальною підгрупою групи G. Якщо G – група Лі, яка примітивно діє на множині S, то переходячи до її алгебри Лі L ми отримуємо поняття примітивної підалгебри алгебри Лі L: це така підалгебра із L, яка є максимальною в L і не містить ненульових ідеалів алгебри L (зауважимо, що в фундаментальній роботі Е.Картана [11] досліджувалися фактично примітивні псевдогрупи перетворень, але більшість понять з теорії груп перетворень мають сенс і для псевдогруп перетворень). Примітивні підалгебри природним чином містяться в алгебрах Лі картанівських серій і значною мірою визначають їх будову, як це було показано в роботах В.Каца [32], [33]. При дослідженні примітивних підалгебр в серії робіт відомих математиків В.Гійєміна та С.Стернберга [23], [24], [25] було вивчено локальну дію таких алгебр Лі на гладких многовидах і отримано ряд фундаментальних результатів, які відносяться до диференціальної геометрії.

При дослідженні алгебр Лі диференціювань кілець многочленів важливим є також питання про властивості окремих елементів цих алгебр Лі, тобто окремих диференціювань. Це питання відноситься переважно до комутативної алгебри і диференціювання вивчаються переважно засобами цього розділу алгебри. Найважливішими тут є питання про будову кільця констант даного диференціювання і про його простоту (диференціювання D називається простим, якщо кільце не містить нетривіальних ідеалів, які є інваріантними відносно дії цього диференціювання). Теорії диференціювань кілець многочленів від кількох змінних присвячено величезну кількість робіт (див., наприклад, монографії [18] та [41]). Важливим класом диференціювань кілець многочленів є локально нільпотентні диференціювання (нагадаємо, що диференціювання D називається локально нільпотентним, якщо для кожного елемента f кільця $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ існує таке натуральне число s_f, що $D^{s_f}(f) = 0$). Локально нільпотентні диференціювання важливі ще й тому, що експонента від такого диференціювання легко визначається (у випадку основного поля $\Bbbk$ нульової характеристики) і є автоморфізмом кільця многочленів $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Локально нільпотентні диференціювання кільця многочленів від двох змінних були описані Р.Ренчлером в роботі [52], виявилось, що з точністю до спряження деяким автоморфізмом кільця многочленів вони мають вигляд $D = f(y)\frac{\partial}{\partial x}$. В загальному випадку опис локально нільпотентних диференціювань є дуже важкою задачею, якій присвячено велику кількість робіт багатьох відомих математиків, і де отримано лише спорадичні результати. Відзначимо зокрема, що в роботах Х.Дерксена [14], [15] та Е.Фройденбурга [20] та [13] локально нільпотентні диференціювання досліджувалися з точки зору їх кілець констант. Сучасний стан справ в цьому дуже цікавому напрямі комутативної алгебри викладено в монографії Е.Фройденбурга [21], яка опублікована зовсім недавно.

Оскільки опис централізаторів елементів в алгебрі Лі $sa_2(k)$ над основним полем характеристики 0 зводиться до вивчення замкнених многочленів від двох змінних, частина дисертаційної роботи присвячена саме цій тематиці. В багатьох випадках зручно вивчати не тільки замкнені многочлени, але й замкнені раціональні функції від кількох змінних (такі раціональні функції можуть бути визначені як такі раціональні функції, які породжують максимальні підполя степеня трансцендентності степеня 1 у поля раціональних функцій). Систематичне вивчення замкнених многочленів розпочалося в роботі М.Нагати і

А.Новіцкі [43], де вивчалися кільця констант диференціювань кільця многочленів $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Зокрема, ними було доведено наступне твердження, яке часто використовується при вивченні диференціювань: якщо $\operatorname{char} \mathbb{k} = 0$ і D– ненульове диференціювання кільця многочленів $\mathbb{k}[x, y]$, то кільце констант цього диференціювання має вигляд $\mathbb{k}[x, y]^D = \mathbb{k}[f]$ для деякого многочлена $f \in \mathbb{k}[x, y]$. Легко бачити, що кожен незвідний многочлен із $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ є замкненим і тому природним є питання, наскільки близькі замкнені многочлени до незвідних. Використовуючи досить глибокі результати із алгебраїчної геометрії (теорему Бертіні та її наслідки, див. [56], теорема 2.6.1) було доведено, що для в деякому сенсі замкнені многочлени відрізняються від незвідних лише адитивною константою (це все для алгебраїчно замкнених полів), а саме було доведено, що для замкненого многочлена $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ сума $f + c$ є незвідним многочленом для всіх крім скінченного числа елементів c основного поля. Одними із перших в цьому напрямі була робота Ю.Стейна [59], який використовуючи методи алгебраїчної геометрії вказав верхню оцінку для кількості таких "виключних"елементів у випадку многочленів від двох змінних і поля характеристики 0. Пізніше в роботах французьких математиків М.Аяда [4], [5] М.Наджиба [38], [39], [40] та інших була уточнена верхня оцінка для кількості елементів поля c, для яких сума $f + c$ є звідним многочленом. Замкнені многочлени та замкнені раціональні функції вивчались також в роботі В.Бавули [7], присвяченій в основному деяким узагальненням теореми Люрота про підполя степеня трансцендентності 1 поля раціональних функцій $\mathbb{k}(x_1, \ldots, x_n)$. В цій роботі були перенесені на поля раціональних функцій також деякі результати М.Нагати і А.Новіцкі про кільця констант диференціювань кільця многочленів від кількох змінних. Зокрема, В.Бавула довів, що для довільного ненульового диференціювання δ поля раціональних функцій $\mathbb{k}(x, y)$ підполе констант також має вигляд $\mathbb{k}(x, y)^\delta = \mathbb{k}(f)$ для деякої раціональної функції $f \in \mathbb{k}(x, y)$. Недавно в роботі І.В.Аржанцева та А.П.Петравчука [2] замкнені многочлени були досліджені з точки зору дії на них скінченних груп автоморфізмів алгебри многочленів від кількох змінних. Нагадаємо, що підалгебра $A \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ називається насиченою, якщо для кожного многочлена $f \in A \setminus \Bbbk$ породжуючий многочлен для f також належить підалгебрі A. Було доведено, що при природній дії скінченної групи $G \subseteq GL_n(\Bbbk)$ на алгебрі многочленів $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ підалгебра констант $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]^G$ буде насиченою в $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ тоді і тільки тоді, коли G не допускає нетривіальних гомоморфізмів в мультиплікативну групу основного поля $\Bbbk$. Це дає можливість будувати багато прикладів ненасичених підалгебр із $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Аналогічні результати були отримані тими ж авторами для замкнених раціональних функцій (тобто таких, які породжують алгебраїчно замкнені в полі $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ підполя степеня трансцендентності 1). Використовуючи властивості замкнених раціональних функцій від кількох змінних в роботі [3] були побудовані приклади не алгебраїчно замкнених підполів із поля раціональних функцій $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, кожне підполе степеня трансцендентності 1 яких є алгебраїчно замкненим.

Однією з перших робіт, в якій фактично вивчалися замкнені многочленам була робота Ф.Закса [63], де було описано Дедекіндові підалгебри алгебри многочленів від кількох змінних. Виявилось, що це будуть лише підалгебри, ізоморфні алгебрі многочленів від однієї змінної. Методи доведення, використані в цій роботі узагальнювалися потім іншими авторами при дослідженні кілець констант окремих диференціювань або сімейств диференціювань. Аналогом замкнених многочленів в полях раціональних функцій від кількох змінних є замкнені функції, які визначаються, умовою, що підполе, ними породжене є максимальним підполем степеня трансцендентності 1. Для замкнених раціональних функцій можна поставити ті ж самі питання. що і для замкнених многочленів, а саме, при якій кількості елементів c основного поля сума $\phi + c$ буде знову замкненою раціональною функцією. Це питання вивчалося в роботі А.Бодена [9], де було вказано оцінку для кількості елементів c в залежності від степеня раціональної функції $\phi = \frac{p}{q}$ який визначається як максимум степенів чисельника і знаменника раціонального дробу. Зауважимо, що на полі раціональних функцій від двох змінних можна ввести структуру алгебри Пуассона таким самим способом. як і на алгебрі многочленів від двох змінних. Тут централізатори елементів будуть вже підполями, які містять основне поле, і питання про будову таких підполів є цікавим і важливим питанням. Аналогічно максимальні абелеві підалгебри будуть максимальними в деякому сенсі підполями і тут важливими є властивості замкнених раціональних функцій, про які йшла мова раніше. Централізатори елементів в полях раціональних функцій вивчалися в роботі А.Бодена [9], а у випадку позитивної характеристики основного поля в роботі С.Скрябіна [57]. Зауважимо, що ще раніше централізатори елементів та максимальні абелеві підалгебри в алгебрах Вейля досліджувалися в роботах багатьох авторів (див., наприклад, [1], [16]). Аналогічно можна поставити питання про централізатори елементів в вільній асоціативній алгебрі над полем. Це питання розглядалося в роботі Г.Бергмана [8], де було доведено, що централізатор довільного елемента із такої алгебри (який не лежить в основному полі) має вигляд $\Bbbk[f]$, де f - деякий елемент із цієї алгебри. Це показує, що питання про централізатори елементів (і про максимальні абелеві підалгебри) виникає природним чином в різних розділах алгебрах, хоча при його вивченні, часто застосовуються зовсім різні підходи.

Розділ 2

Означення та допоміжні результати

Означення 2.0.1. *Нижнім центральним рядом алгебри Лі L називається ряд ідеалів*

$$L = L^0 \supseteq L^1 \supseteq \dots \supseteq L^n \supseteq \dots,$$

де $L^i := [L, L^{i-1}]$, тобто $L^1 = [L, L]$, $L^2 = [L, [L, L]]$, $L^3 = [L, [L, [L, L]]]$ і т. д.

Означення 2.0.2. *Похідним рядом алгебри Лі L називається ряд ідеалів*

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \dots \supseteq L^{(n)} \supseteq \dots,$$

де $L^i := [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$, тобто $L^{(1)} = [L, L] = L^1$, $L^{(2)} = [[L, L], [L, L]]$ і т. д. Замість $L^{(1)}$ часто використовується L' (перша похідна), а замість $L^{(2)}$ пишуть L'' (друга похідна).

Означення 2.0.3. *Алгебра Лі називається нільпотентною, якщо її нижній центральний ряд закінчується нулем, тобто існує таке число n, що $L^n = 0$. Найменше таке n, що $L^n = 0$ називається класом нільпотентності (ступенем нільпотентності) алгебри Лі L.*

Нільпотентними алгебрами ступеня нільпотентності один є, очевидно, абелеві алгебри.

Означення 2.0.4. *Алгебра Лі називається розв'язною, якщо її похідний ряд закінчується нулем, тобто існує таке число* n, *що* $L^{(n)} = 0$. *Найменше таке* n *називається ступенем розв'язності (розв'язною довжиною) алгебри Лі* L.

Зрозуміло, що розв'язними алгебрами ступеня розв'язності один є абелеві алгебри.

Тензорний добуток асоціативної алгебри і алгебри Лі. Нехай L алгебра Лі над полем $\Bbbk$, і нехай A асоціативна комутативна $\Bbbk-$алгебра. Тоді векторний простір $A \otimes_k L$ з множенням $[a_1 \otimes l_1, a_2 \otimes l_2] = a_1 a_2 [l_1, l_2]$, $a_i \in A$, $l_i \in L$, $i = 1, 2$, є алгеброю Лі над полем $\Bbbk$.

Наведена конструкції дає широкий клас прикладів алгебр Лі, деякі алгебри Лі, які розглядаються в роботі, можуть бути отримані саме таким чином.

Означення 2.0.5. *Нехай* L *алгебра Лі і нехай* a *деякий її елемент. Тоді централізатором елемента* a *називається множина* $C_L(a)$ *усіх таких елементів* b *алгебри Лі, що комутують з* a:

$$C_L(a) = \{b \in L \mid [a, b] = 0\}.$$

Означення 2.0.6. *Векторний простір* P *над полем* $\Bbbk$, *в якому визначені дві білінійні операції* $x \cdot y$ *(множення) та* $[x, y]$ *(дужка Пуассона), називається Пуассоновою алгеброю, якщо* P *є комутативною асоціативною алгеброю відносно операції* $x \cdot y$, P *є алгеброю Лі відносно операції* $[x, y]$ *і* P *задовольняє наступну тотожність (тотожність Лейбніца)*

$$[a \cdot b, c] = [a, c] \cdot b + a \cdot [b, c]$$

для довільних елементів $a, b, c \in P$.

Зауваження 2.0.1. *Остання умова в Означенні 2.0.6 означає, що відображення* $P \to P, \quad g \mapsto [f, g]$, *є диференціюванням асоціативної алгебри* P *у сенсі Означення 2.0.9.*

Означення 2.0.7. *1) Нехай $S \subseteq R$ розширення кілець. Елемент $b \in R$ називається цілим над S, якщо існує монічний многочлен*

$$f = t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m \in S[t],$$

такий що $f(b) = 0$. Розширення $S \subseteq R$ називається цілим, якщо усі елементи з R цілі над S.

Підкільце S називається цілозамкненим у R, якщо кожен цілий над S елемент із R належить вже S.

2) Область цілісності R називається нормальною, якщо кільце R цілозамкнене в своєму полі часток $Q(R)$.

3) Розширення полів $K \subseteq L$ називається алгебраїчним, якщо воно є цілим розширенням кілець. Елемент $b \in L$ називається алгебраїчним над K, якщо він цілий над K. Іншими словами, у випадку полів прикметник “цілий” не вживається, замість нього вживають прикметник “алгебраїчний”.

Лема 2.0.2. *Нехай $A \subseteq R$ ціле розширення кілець, і нехай R нормальна область цілісності. Тоді $Q(A) \subseteq Q(R)$ є також цілим (алгебраїчним) розширенням.*

Доведення. Оскільки $A \subseteq R$ і $R \subseteq Q(R)$ є цілими розширеннями, ми отримуємо, що $A \subseteq Q(R)$ також ціле.

Нехай $a \in Q(R)$, $a \neq 0$, цілий над $Q(A)$, тоді

$$a^n + (g_1/h_1)a^{n-1} + \cdots + (g_n/h_n) = 0, \quad g_i, h_i \in A, h_i \neq 0.$$

Помноживши останню рівність на h^n, де $h = h_1 h_2 \ldots h_n$, отримуємо

$$(ha)^n + g_1(\prod_{i \neq 1} h_i)(ha)^{n-1} + g_2 h(\prod_{i \neq 2} h_i)(ha)^{n-2} + \cdots + g_n h^{n-1}(\prod_{i \neq n} h_i) = 0.$$

Отже ha є цілим над A. Використовуючи цілозамкненість A, одержуємо $ha \in A$ і, значить, $h \in Q(A)$, що доводить лему. $\square$

Означення 2.0.8. *Кільце R називається дедекіндовим кільцем, якщо R нормальне і $\dim R = 1$.*

Теорема 2.0.3 (Zaks [63], Eakin [17])**.** *Нехай R дедекіндове підкільце кільця многочленів $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, що містить поле $\mathbb{k}$. Тоді $R = \mathbb{k}[f]$ для деякого многочлена $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, тобто є кільцем многочленів від однієї змінної. вербі*

Теорема 2.0.4 (Gordan [22], Igusa [31])**.** *Нехай $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$ алгебраїчно замкнене поле. Нехай $\mathbb{k} \subseteq E \subseteq \mathbb{k}(x_1, \ldots, x_n)$ розширення полів степені трансцендентності* $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{k}} E = 1$*. Тоді $E = \mathbb{k}(e)$ для деякого елемента $e \in \mathbb{k}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Означення 2.0.9. *Нехай R – асоціативна $\mathbb{k}-$алгебра. Тоді*

1) (скалярним) диференціюванням називається довільне $\mathbb{k}-$лінійне відображення $\delta : R \to R$, яке задовольняє правило Ляйбніца $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$; множина усіх диференціювань алгебри R утворює векторний підпростір в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(R, R)$*, що позначається* $\operatorname{Der}(R)$*;*

2) векторним диференціюванням розмірності m називається довільне лінійне відображення $D : R \to R^m$, кожна компонента якого є скалярним диференціюванням алгебри R, тобто $D = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$, де $\delta_i : R \to R$ є скалярним диференціюванням.

Множина $\operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(R, R)$ усіх $\mathbb{k}-$ендоморфізмів $\mathbb{k}$-алгебри R відносно операції композиції утворює асоціативну $\mathbb{k}$-алгебру. Тому, як було зазначено вище, асоціативна $\mathbb{k}-$алгебра $\operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(R, R)$ буде алгеброю Лі відносно комутатора $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. Важливою властивістю диференціювань є те, що вони утворюють підалгебру Лі у алгебрі Лі $\operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(R, R)$.

Означення 2.0.10. *1) Нехай δ диференціювання кільця многочленів від n змінних $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Многочлен f називається многочленом Дарбу (або власним вектором) для δ, якщо $\delta(f) = \lambda f$ для деякого многочлена λ (не обов'язково $\lambda \in \mathbb{k}$). Многочлен λ називається комножником диференціювання δ*

(або узагальненим власним значенням), який відповідає многочлену Дарбу f. *Іншими словами,* f *є поліноміальною власною функцією для* δ *з (узагальненим) власним значенням* λ.

2) Якщо $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ *векторне диференціювання кільця многочленів* $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$*, то многочлен* f *називається многочленом Дарбу для* δ*, якщо він є многочленом Дарбу для кожної координати* δ_i *диференціювання* δ*, тобто* $\delta_i(f) = \lambda_i f$ *для деяких* $\lambda_i \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, $i = \overline{1, m}$. *Комножником у цьому випадку є вектор комножників* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Лема 2.0.5. *1) Якщо* f *і* g *є многочленами Дарбу деякого диференціювання* $\delta : \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$*, що відповідають комножникам* λ *і* μ *відповідно, то тоді* fg *є многочленом Дарбу диференціювання* δ*, який відповідає комножнику* $\lambda + \mu$*;*

2)Нехай h *многочлен Дарбу диференціювання*

$$\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\delta} \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n].$$

Тоді довільний дільник многочлена h *теж є многочленом Дарбу для* δ.

Доведення. 1) Випливає з рівності

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g) = \lambda fg + f\mu g = (\lambda + \mu)fg.$$

2) Нехай $\delta(h) = \lambda h$. Нехай спочатку $h = h_1 h_2$, де h_1 і h_2 взаємнопрості. Доведемо, що, наприклад, h_1 є многочленом Дарбу диференціювання δ. Дійсно, з

$$\lambda h_1 h_2 = \lambda h = \delta(h) = \delta(h_1 h_2) = h_1 \delta(h_2) + h_2 \delta(h_1)$$

випливає, що $h_2 \delta(h_1) = (\lambda h_2 - \delta(h_2))h_1$. Оскільки h_1 і h_2 взаємнопрості, то $\lambda h_2 - \delta(h_2) = h_2 a$ для деякого многочлена a, і ми отримуємо $h_2 \delta(h_1) = (\lambda h_2 - \delta(h_2))h_1 = h_2 a h_1$, а отже $\delta(h_1) = a h_1$. Таким чином h_1 многочлен Дарбу, що відповідає комножнику a.

Припустімо тепер, що многочлен h має вигляд $h = h_1^m$ для деякого многочлена h_1 і натурального числа m. Тоді

$$\lambda h_1^m = \lambda h = \delta(h) = \delta(h_1^m) = m h_1^{m-1}\delta(h_1),$$

звідки отримуємо, що $\delta(h_1) = \frac{\lambda}{n} h_1$, тобто h_1 є многочленом Дарбу, що відповідає комножнику(власному числу) $\frac{\lambda}{n}$.

З доведеного вище випливає, що довільний незвідний множник многочлена h є многочленом Дарбу диференціювання δ. Оскільки за першою частиною цієї Леми добуток многочленів Дарбу є знову многочленом Дарбу, отримуємо, що довільний множник многочлена Дарбу є многочленом Дарбу. □

Аналогічні властивості мають і векторні диференціювання.

Лема 2.0.6. *1) Якщо f і g є многочленами Дарбу деякого векторного диференціювання $\delta : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]^m$, що відповідають комножникам λ і μ відповідно, то тоді fg є многочленом Дарбу векторного диференціювання δ, який відповідає комножнику $\lambda + \mu$;*

2)Нехай h многочлен Дарбу векторного диференціювання $\delta : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]^m$. Тоді довільний дільник многочлена h теж є многочленом Дарбу для δ.

Доведення. Для доведення цих властивостей достатньо повторити доведення Леми 2.0.5 для кожної компоненти векторного диференціювання δ. □

Теорема 2.0.7 (Ollagnier)**.** *Нехай $\Bbbk$ поле характеристики нуль і нехай $\delta : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]^r$ – скалярне ($r = 1$) або векторне ($r \geqslant 2$) диференціювання кільця многочленів від n змінних. Нехай m натуральне число. Тоді число комножників, які відповідають многочленам Дарбу степеня не більше m скінченне.*

Доведення. Див. [46], Proposition 4 та Corollary 5. □

Означення 2.0.11. *Нехай* $\delta : R \to R$ *диференціювання* $\Bbbk-$*алгебри* R. *Тоді елементи ядра диференціювання* $R^{\delta} := \ker \delta$ *називаються константами диференціювання* δ. *Множина констант диференціювання* δ *є підкільцем (насправді* $\Bbbk$*-підалгеброю) у* R. *Це кільце називається кільцем констант диференціювання* δ.

Константи диференціювання кільця многочленів є многочленами Дарбу, що відповідають комножнику 0.

Лема 2.0.8. *1) Нехай* $\Bbbk$ *поле характеристики нуль і* R *–* $\Bbbk-$*алгебра без дільників нуля. Тоді для довільного диференціювання* $D : R \to R$ *алгебри* R *підалгебра констант* R^D *цілозамкнена у* R.

2) Нехай D *диференціювання кільця* $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *або поля* $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$. *Тоді множина констант диференціювання* D *є цілозамкненою підалгеброю в* $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *або у* $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ *відповідно.*

Доведення. 1) Розглянемо цілий над R^D елемент a. Нехай $f \in R^D[t]$, $f(t) = t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m$, $b_i \in R^D$, монічний многочлен найменшого степеня, який анулює a. Тоді, застосовуючи диференціювання D до

$$a^m + b_1 a^{m-1} + \cdots + b_m = 0,$$

отримуємо

$$(ma^{m-1} + (m-2)b_1 a^{m-2} + \cdots + b_{m-1})D(a) = 0.$$

Оскільки R без дільників нуля і f мінімальний анулюючий многочлен, робимо висновок, що $D(a) = 0$, отже $a \in R^D$.

2) очевидно випливає з 1), оскільки $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ і $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ кільця без дільників нуля. $\square$

В роботі [43] було доведено наступну теорему, яка часто використовується при вивченні диференціювань кільця многочленів від двох змінних.

Теорема 2.0.9 (Theorem 2.8, [43]). *Нехай D диференціювання кільця $\mathbb{k}[x, y]$. Тоді існує многочлен $f \in \mathbb{k}[x, y]$, такий що* $\ker D = \mathbb{k}[f]$.

Аналогічне твердження має місце для диференціювань поля раціональних функцій від двох змінних

Теорема 2.0.10 (Corollary 2.6, [7]). *Нехай $\mathbb{k}$ алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, нехай D відмінне від нульового диференціювання поля $\mathbb{k}(x, y)$. Тоді* $\ker D = \mathbb{k}(f)$ *для деякого $f \in \mathbb{k}(x, y)$.*

Нагадаємо, що в довільній алгебрі Лі L над полем $\mathbb{k}$ для довільного елемента $a \in L$ відображення

$$\mathrm{ad}(a) : L \to L, \quad b \mapsto \mathrm{ad}(a)(b) := [a, b]$$

є $\mathbb{k}-$диференціюванням алгебри Лі L, тобто лінійним відображенням $L \to L$, що задовольняє умову

$$\mathrm{ad}(a)([b, c]) = [\mathrm{ad}(a)(b), c] + [b, \mathrm{ad}(a)(c)].$$

Такі диференціювання називаються внутрішніми. Якщо ж L є ще й алгеброю Пуассона, то з означення алгебри Пуассона випливає, що $\mathrm{ad}(a)$ є ще й диференціюванням Пуассонової структури у сенсі Означення 2.0.9 Для вільних Пуассонових алгебр має місце аналог теореми Бергмана про структуру централізатора в вільній асоціативній алгебрі

Теорема 2.0.11 (Theorem 1, [58]). *Нехай $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{k}$, тоді ядро внутрішнього диференціювання* $\mathrm{ad}(f)$ *є кільцем многочленів від однієї змінної, тобто* $\ker \mathrm{ad}(f) = \mathbb{k}[h]$ *для деякого відмінного від константи многочлена $h \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Теорема 2.0.12 (Theorem 4.1, [36]). *Нехай D відмінне від нуля диференціювання кільця формальних степеневих рядів від двох змінних $\mathbb{k}[[x, y]]$. Тоді* $\ker D = \mathbb{k}[[h]]$ *для деякого ряду $h \in \mathbb{k}[[x, y]]$.*

Теорема 2.0.13 (Theorem 4.4, [43]). *Нехай* $\Bbbk$ *поле характеристики* $p > 0$, *і нехай* D *це* $\Bbbk-$*диференціювання кільця многочленів від двох змінних* $\Bbbk[x, y]$. *Тоді* $\ker D$ *є вільним* $\Bbbk[x^p, y^p]-$*модулем.*

Лема 2.0.14. *Якщо многочлени* $f, g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$ *алгебраїчно залежні, то існує многочлен* $h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, *такий що* $f \in \Bbbk[h]$ *і* $g \in \Bbbk[h]$.

Доведення. Нехай $\Phi \in \Bbbk[t_1, t_2] \setminus \Bbbk$ многочлен, такий що $\Phi(f, g) = 0$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(f, g) = \cdots = \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi(f, g) = 0,$$

звідки випливає

$$\Phi_{t_1}(f, g)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \Phi_{t_2}(f, g)\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки або $\Phi_{t_1}(f, g)$ або $\Phi_{t_2}(f, g)$ не дорівнює нулю, отримуємо, що вектори $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^t$ і $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)^t$ алгебраїчно залежні над $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Останнє означає, що

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} & \frac{\partial g}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad j > i.$$

Отже, $[f, g] = 0$, тому g належить до ядра диференціювання $\mathrm{ad}(f)$, що за Теоремою 2.0.11 має вигляд $\ker \mathrm{ad}(f) = \Bbbk[h]$ для деякого многочлена $h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Отже $f, g \in \Bbbk[h]$. □

Нагадаємо, що раціональні функції $f_1, \ldots, f_k \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ називаються алгебраїчно залежними, якщо існує відмінна від нуля раціональна функція $F(t_1, \ldots, t_k) \in \Bbbk(t_1, \ldots, t_k)$ така, що $F(f_1, \ldots, f_k) = 0$.

В наступній лемі зібрані для зручності еквівалентні умови алгебраїчної залежності двох раціональних функцій від кількох змінних.

Лема 2.0.15. *Для раціональних функцій* $\varphi, \psi \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n) \setminus \Bbbk$ *наступні умови є еквівалентними.*

1) φ and ψ алгебраїчно залежні над $\Bbbk$;

2) ранг матриці Якобі $J(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ дорівнює 1;

3) для диференціалів $d\varphi$ і $d\psi$ функцій φ і ψ відповідно має місце $d\varphi \wedge d\psi = 0$;

4) існує $h \in \Bbbk(x_1,\ldots,x_n)$, так що $\varphi = F(h)$ і $\psi = G(h)$ для деяких раціональних функцій $F(t), G(t) \in \Bbbk(t)$.

Доведення. Еквівалентність 1) і 2) випливає з [26], Ch.III, §7, Th. III. Еквівалентність 2) і 3) очевидна. Оскільки 2) випливає з 4), достатньо довести, що з 1) випливає 4). Нехай φ та ψ алгебраїчно залежні. Тоді, очевидно, степінь трансцендентності $\operatorname{tr.deg}_{\Bbbk} \Bbbk(\varphi,\psi)$ дорівнює 1. За Теоремою 2.0.4 (див. також [54], стор. 15) ми отримуємо $\Bbbk(\varphi,\psi) = \Bbbk(h)$ для деякої раціональної функції h, і тому $\varphi = F(h)$ and $\psi = G(h)$ для деяких раціональних функцій $F(t), G(t) \in \Bbbk(t)$. □

Розглянемо тепер алгебру многочленів від двох змінних $\Bbbk[x,y]$ і введемо бінарну операцію на $\Bbbk[x,y]$, визначену за правилом

$$[f,g] := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Очевидно, що ця операція є білінійною.

Твердження 2.0.16. $(\Bbbk[x,y],\ \cdot\ ,\ [\ ,\ ])$ *є алгеброю Пуассона.*

Доведення. Очевидно, що $[f,f] = 0$ для довільного многочлена $f \in \Bbbk[x,y]$. Прямі обчислення показують, що має місце й тотожність Якобі, тобто

$$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0.$$

Це доводить, що $\Bbbk[x,y]$ є алгеброю Лі відносно дужки $[\ ,\ ]$. Оскільки $[f,gh] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(gh) - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(fh)$, і оскільки диференціювання $\frac{\partial}{\partial x}$ та $\frac{\partial}{\partial y}$ задовольняють правило Ляйбніца, ми отримуємо

$$[f,gh] = [f,g]h + g[f,h],$$

тобто $\Bbbk[x,y]$ є алгеброю Пуассона. □

Означена вище алгебра Пуассона позначається $P_2(\mathbb{k})$.

Аналогічно до алгебри $P_2(\mathbb{k})$ можна ввести структуру алгебри Пуассона на наступних асоціативних $\mathbb{k}-$алгебрах.

Означення 2.0.12. *На кільці многочленів $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ від n змінних теж існує структура алгебри Лі (Пуассона), дужку Лі в цьому випадку можна задати так:*

$$[f, g] = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Ми позначатимемо цю алгебру $P_n(\mathbb{k})$.

Означення 2.0.13. *На полі раціональних функцій $\mathbb{k}(x, y)$ від двох змінних над полем $\mathbb{k}$ введемо множення як у випадку алгебри $P_2(\mathbb{k})$ за правилом:*

$$[f, g] := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Неважко переконатися, що це буде алгебра Пуассона, її ми будемо позначати $\widetilde{P_2(\mathbb{k})}$.

Неважко переконатися що для означених вище алгебр Пуассона має місце наступне твердження.

Лема 2.0.17. *Нехай L одна з означених вище алгебр Пуассона. Нехай f та g два елементи цієї алгебри, і нехай $\Phi(t)$ це, в залежності від алгебри L, многочлен чи раціональна функція від однієї змінної. Тоді*

$$[f, \Phi(g)] = \Phi'(g)[f, g],$$

де $\Phi'(t)$ це похідна від $\Phi(t)$.

Доведення. Випливає з того, що за означенням алгебри Пуассона, внутрішнє диференціювання $\mathrm{ad}(f) = [f, \_] : L \to L$ є диференціюванням асоціативної структури алгебри L. $\square$

Зауважимо, що кільце формальних степеневих рядів $\Bbbk[[x, y]]$ від двох змінних над полем $\Bbbk$, разом з операцією взяття якобіану

$$[f, g] := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

також є Пуассоновою алгеброю.

Хоча в подальшому ми й використовуватимемо Пуассонову структуру означених вище алгебр, нас цікавитиме переважно їх структура як алгебр Лі.

Означення 2.0.14. *Множина усіх диференціювань кільця многочленів від двох змінних, що складається з диференціювань із нульовою дивергенцією, є підалгеброю в алгебрі Лі* $\mathrm{Der}(\Bbbk[x, y])$ *яка позначається*

$$sa_2(\Bbbk) = \left\{ D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} \in \mathrm{Der}(\Bbbk[x, y]) \mid \mathrm{div} D := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \right\}.$$

Аналогічне означення введемо для поля раціональних функцій від двох змінних

Означення 2.0.15. *Множина усіх диференціювань поля раціональних функцій від двох змінних, що складається з диференціювань із нульовою дивергенцією є підалгеброю в алгебрі Лі* $\mathrm{Der}(\Bbbk(x, y))$, *яка позначається*

$$\widetilde{sa_2}(\Bbbk) = \left\{ D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} \in \mathrm{Der}(\Bbbk(x, y)) \mid \mathrm{div} D := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \right\}.$$

Таким же способом визначається алгебра Лі $sa_2^{\mathrm{pow}}(\Bbbk)$, що є підалгеброю в алгебрі Лі усіх диференціювань кільця $\Bbbk[[x, y]]$ формальних степеневих рядів від двох змінних, що складається з диференціювань із нульовою дивергенцією, тобто

$$sa_2^{\mathrm{pow}}(\Bbbk) = \left\{ D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} \in \Bbbk[[x, y]] \mid \mathrm{div} D := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \right\}.$$

Розділ 3

Замкнені многочлени і раціональні функції

В цьому розділі вивчаються замкнені многочлени і замкнені раціональні функції від кількох змінних над основним полем характеристики $\operatorname{char} \mathbb{k} = 0$. Властивості і будова цих математичних об'єктів є цікавими з огляду на їх багаточисельні застосування в різних розділах алгебри, але в даній роботі основна увага приділена тому, що замкнені многочлени (або раціональні функції) природнім чином виникають як твірні ядер окремих диференціювань або сімейств диференціювань кілець многочленів (або полів раціональних функцій) від кількох змінних. Для раціональних функцій над полем нульової характеристики отримано зручну достатню умову замкнутості (теорема 3.2.8). Крім того, питання про замкненість раціональної функції зведено до питання про властивості пучка гіперповерхонь, яке в багатьох випадках виявляється більш легким ніж питання про замкненість раціональної функції (теорема 3.3.2).

3.1 Замкнені многочлени

Означення 3.1.1. *Нехай $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Тоді многочлен f називається замкненим, якщо підалгебра $\mathbb{k}[f]$ цілозамкнена в $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Зручну характеризацію замкнених многочленів дає наступна добре відома лема (див., наприклад, [43], Lemma 3.1.) З огляду на важливість цього результату і його широке застосування наведемо також і його доведення.

Лема 3.1.1. *Многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$ є замкненим тоді і лише тоді, коли підалгебра $\Bbbk[f]$ є максимальним елементом в частково впорядкованій за включенням множині*

$$\mathcal{M} = \{\Bbbk[h] \mid h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk\}.$$

Доведення. Нехай f замкнений многочлен. Якщо $\Bbbk[f] \subseteq \Bbbk[h]$ для деякого h, то тоді f є многочленом від h ($f = F(h)$ для деякого $F(t) \in \Bbbk[t]$), отже h цілий над $\Bbbk[f]$. Оскільки за означенням замкненого многочлена підалгебра $\Bbbk[f]$ цілозамкнена в $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, робимо висновок, що h належить $\Bbbk[f]$. Таким чином $\Bbbk[f] = \Bbbk[h]$ і $\Bbbk[f]$ є дійсно максимальним елементом множини $\mathcal{M}$.

Навпаки, нехай тепер $\Bbbk[f]$ максимальний елемент в $\mathcal{M}$. Розгляньмо ціле замикання I підалгебри $\Bbbk[f]$ у $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Тоді $\dim I = \dim \Bbbk[f] = 1$ і, оскільки, кільця многочленів є нормальними кільцями, з башти цілих розширень $I \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \subseteq \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ випливає, що I цілозамкнене в $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$, зокрема є цілозамкненим у своєму полі часток, тобто є нормальним. Ми довели, що I є дедекіндовим підкільцем в $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, отже за Теоремою 2.0.3 маємо $I = \Bbbk[h]$ для деякого h. Оскільки $\Bbbk[f] \subseteq I = \Bbbk[h]$ і за припущенням $\Bbbk[f]$ максимальний елемент в $\mathcal{M}$, отримуємо $\Bbbk[f] = I = \Bbbk[h]$, тобто підалгебра $\Bbbk[f]$ цілозамкнена у $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, а отже f є замкненим многочленом. □

Зауваження 3.1.2. *Зауважимо, що $\Bbbk[f]$ є максимальною однопородженою підалгеброю у кільці многочленів $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ тоді й лише тоді, коли многочлен f замкнений, тобто із рівності $f = F(g)$ для деяких многочленів $g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$ і $F(t) \in \Bbbk[t]$ випливає* $\deg F = 1$.

Наступна лема дає достатньо великий клас прикладів замкнених многочленів.

Лема 3.1.3. *Над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль довільний незвідний многочлен f є замкненим.*

Доведення. Припустімо, що f незамкнений. Тоді $f = F(h)$ для деяких многочленів

$$h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \text{ і } F(t) \in \Bbbk[t], \deg F > 1.$$

Оскільки многочлен F є звідним (як многочлен від однієї змінної над алгебраїчно замкненим полем), то f є також звідним. Ми отримали протиріччя. $\square$

Приклад 3.1.4. *Многочлен від двох змінних $xy + 1 \in \Bbbk[x, y]$ незвідний, тому замкнений, але оскільки для довільного замкненого многочлена f многочлен $f + \lambda$, $\lambda \in \Bbbk$ є теж замкненим за означенням, отримуємо, зокрема, що многочлен xy замкнений.*

Важливими прикладами замкнених многочленів є многочлени, які утворюють пару Якобі. Нагадаємо, що два многочлени від двох змінних f, g утворюють пару Якобі, якщо $[f, g] = \det J(f, g) \in \Bbbk^*$. Для зручності будемо називати такі многочлени многочленами Якобі.

Лема 3.1.5. *Нехай $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$ многочлен Якобі, тоді многочлен f є замкненим.*

Доведення. Припустімо, що многочлен f не є замкненим. Тоді існує многочлен від однієї змінної $F(t) \in \Bbbk[t]$ степеня $\deg F > 1$, такий що $f = F(h)$ для деякого многочлена $h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Оскільки f многочлен Якобі, існує многочлен $g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ з $[f, g] = c \in \Bbbk^*$. Тоді, використовуючи Лему 2.0.17, маємо

$$[f, g] = [F(h), g] = F'(h)[h, g] = c.$$

Це неможливо, оскільки $\deg F' \geqslant 1$, що й доводить лему. $\square$

Приклад 3.1.6. *Многочлен від двох змінних $x + y^2 \in \Bbbk[x, y]$ є многочленом Якобі, оскільки $[x + y^2, y] = 1$, тому він замкнений.*

Приклад 3.1.7. *Зауважимо, що існують замкнені многочлени, які не є многочленами Якобі, тобто такі многочлени* f*, для яких не існує многочлена* $g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *із властивістю* $[f, g] \in \Bbbk^*$*. Прикладом такого многочлена від двох змінних є многочлен* xy*, який, як було показано вище, є замкненим. Припустимо, що існує многочлен від двох змінних* g *такий, що*

$$[xy, g] = y\frac{\partial g}{\partial y} - x\frac{\partial g}{\partial x} \in \Bbbk^*.$$

Обчислюючи в точці $x = 0$*,* $y = 0$*, отримуємо* $0 \in \Bbbk^*$*. Одержане протиріччя показує хибність нашого припущення. Отже многочлен* xy *дійсно не є многочленом Якобі.*

Означення 3.1.2. *Нехай* $f, h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$*. Многочлен* h *називається породжуючим для многочлена* f*, якщо* h *замкнений і якщо* $f \in \Bbbk[h]$*, тобто якщо* $f = F(h)$ *для деякого* $F(t) \in \Bbbk[t]$*.*

Лема 3.1.8. *Для довільного многочлена* $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$*, існує породжуючий многочлен. Породжуючий многочлен визначений однозначно з точністю до афінного перетворення, тобто якщо* h_1*,* h_2 *два породжуючих многочлени многочлена* f*, тоді існують константи* $c_1 \in \Bbbk^*$*,* $c_2 \in \Bbbk$*, такі що* $h_2 = c_1 h_1 + c_2$*;*

Доведення. Оскільки із включення $\Bbbk[f] \subsetneq \Bbbk[g]$ випливає, що $\deg g < \deg f$, то f міститься в деякій максимальній однопородженій підалгебрі $\Bbbk[h]$. За Лемою 3.1.1 h породжуючий многочлен для f. Припустімо, що h_1 і h_2 породжуючі многочлени для f. Це означає, зокрема, що $f \in \Bbbk[h_1]$ і $f \in \Bbbk[h_2]$. Тому $f = F_1(h_1)$ і $f = F_2(h_2)$ для деяких многочленів $F_1(t), F_2(t) \in \Bbbk[t]$. Тоді $F_1(h_1) - F_2(h_2) = 0$ і звідси отримуємо, що h_1 і h_2 алгебраїчно залежні. За Лемою 2.0.14 маємо $h_1 \in \Bbbk[h]$, $h_2 \in \Bbbk[h]$ для деякого многочлена h. Оскільки тоді $\Bbbk[h_1] \subseteq \Bbbk[h] \supseteq \Bbbk[h_2]$, то, використовуючи характеризацію замкнених многочленів, отримуємо $\Bbbk[h_1] = \Bbbk[h_2]$, а отже і $h_2 = c_1 h_1 + c_2$ для деяких $c_1 \in \Bbbk^*$, $c_2 \in \Bbbk$. $\square$

Наслідком з існування породжуючого многочлена є наступне уточнення Леми 2.0.14.

Лема 3.1.9. *Якщо многочлени $f, g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$ алгебраїчно залежні, то існує спільний для f і g породжуючий многочлен $h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, тобто такий h, що $f \in \Bbbk[h]$ і $g \in \Bbbk[h]$. Отже множини породжуючих многочленів для f і g співпадають.*

Доведення. За Лемою 2.0.14 існує многочлен h_0, такий що f та g містяться у $\Bbbk[h_0]$. За попередньою лемою існує породжуючий для h_0 многочлен h. Отже $f, g \in \Bbbk[h_0] \subseteq \Bbbk[h]$. □

У випадку алгебраїчно замкненого поля $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$ замкнені многочлени можуть бути охарактеризовані наступною теоремою (див. також Théorème 8, [4]).

Теорема 3.1.10 (Corollary 3.3.1, [54])**.** *Нехай $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$ алгебраїчно замкнене поле, тоді многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ є замкненим тоді і лише тоді, коли $f - \lambda$ є незвідним для усіх, крім можливо скінченного числа, $\lambda \in \Bbbk$.*

У випадку замкнених многочленів від двох змінних оцінки на кількість усіх незвідних множників многочленів $f - \lambda$, $\lambda \in \Bbbk$, можна знайти в роботах [59], [35], та [38].

Наслідками з Теореми 3.1.10 є наступні твердження у випадку алгебраїчно замкнених полів характеристики нуль.

Наслідок 3.1.11. *Нехай поле $\Bbbk$ алгебраїчно замкнене, тоді для довільного відмінного від константи многочлена f існує незвідний породжуючий многочлен. Таким чином довільний многочлен f можна подати у вигляді $f = F(h)$, де $F(t) \in \Bbbk[t]$ є многочлен від однієї змінної, і $h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ — незвідний многочлен.*

Доведення. Дійсно, нехай h породжуючий многочлен для f. Оскільки h замкнений, то за Теоремою 3.1.10 існує така константа $\lambda \in \Bbbk$, що $h - \lambda$ є незвідним многочленом. Оскільки $\Bbbk[h] = \Bbbk[h - \lambda]$, то незвідний многочлен $h - \lambda$ теж є породжуючим для f многочленом. Лему доведено. $\square$

Наслідок 3.1.12. *Нехай $\Bbbk$ алгебраїчно замкнене поле. Якщо многочлени від n змінних f і g незвідні і алгебраїчно залежні, тоді $f = c_1 g + c_2$ для деяких констант $c_1 \in \Bbbk^*$, $c_2 \in \Bbbk$.*

Доведення. Оскільки f і g алгебраїчно залежні, за Лемою 3.1.9 для f і g існує спільний породжуючий многочлен h. Незвідні многочлени f і g замкнені за Лемою 3.1.3. Тому, користуючись характеризацією замкнених многочленів, отримуємо $\Bbbk[f] = \Bbbk[h] = \Bbbk[g]$, а отже $f = c_1 g + c_2$ для деяких констант $c_1 \in \Bbbk^*$ та $c_2 \in \Bbbk$. $\square$

3.2 Замкнені раціональні функції

Означення 3.2.1. *Степенем раціональної функції $\frac{f}{g} \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$, де f та g взаємнопрості многочлени називається максимум степенів многочленів f та g:*

$$\deg\left(\frac{f}{g}\right) := \max\{\deg f, \deg g\}.$$

Зауважимо, що степінь многочлена як раціональної функції співпадає із звичайним степенем, тому наведене означення не призводить до двозначностей. В наступній лемі наведено важливі властивості степеня раціональних функцій. Ці властивості є цілком аналогічними до властивостей степеня многочленів, і їх доведення зводиться до прямих підрахунків степенів чисельника і знаменника раціональної функції.

Лема 3.2.1. *1) Нехай $\varphi \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ – раціональна функція від n змінних. Тоді $\deg(\varphi) = 0$ тоді й лише тоді, коли $\varphi \in \Bbbk^*$.*

2) Якщо φ – раціональна функція від однієї змінної, тоді для довільної раціональної функції $\psi \in \Bbbk(x_1,\dots,x_n)$ має місце рівність

$$\deg(\varphi \circ \psi) = \deg \varphi \cdot \deg \psi,$$

зокрема для раціональної функції від однієї змінної $\deg \varphi = 1$ тоді й лише тоді, коли φ є дробово-лінійним перетворенням, тобто

$$\varphi(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \quad ad - cb \neq 0.$$

Означення 3.2.2. *Раціональна функція $\varphi \in \Bbbk(x_1,\dots,x_n) \setminus \Bbbk$ називається замкненою, якщо підполе $\Bbbk(\varphi)$ алгебраїчно замкнене в $\Bbbk(x_1,\dots,x_n)$.*

Як і в випадку замкнених многочленів маємо зручну характеризацію замкнених раціональних функцій через максимальні однопороджені підполя в $\Bbbk(x_1,\dots,x_n)$.

Лема 3.2.2. *Раціональна функція φ замкнена тоді і лише тоді, коли $\Bbbk(\varphi)$ максимальний елемент у частково впорядкованій (за включенням) множині однопороджених підполів $\Bbbk(\psi)$ у $\Bbbk(x_1,\dots,x_n)$, де $\psi \in \Bbbk(x_1,\dots,x_n) \setminus \Bbbk$.*

Доведення. Нехай раціональна функція φ замкнена. Припустимо, що $\Bbbk(\varphi)$ міститься у $\Bbbk(\psi)$ для деякої раціональної функції $\psi \in \Bbbk(x_1,\dots,x_n)$. Тоді φ є раціональною функцією від ψ, тобто

$$\varphi = \frac{a_m\psi^m + \dots + a_0}{b_l\psi^l + \dots + b_0}, \quad a_i, b_j \in \Bbbk,$$

отже

$$(b_l\psi^l + \dots + b_0)f = a_m\psi^m + \dots + a_0.$$

Останнє означає, що ψ є алгебраїчним елементом над $\Bbbk(\varphi)$, і тому, за означенням замкненої раціональної функції, ми маємо $\psi \in \Bbbk(\varphi)$. Отже $\Bbbk(\varphi)$ максимальний елемент у множині усіх однопороджених підполів поля $\Bbbk(x_1,\dots,x_n)$.

Якщо $\Bbbk(\varphi)$ максимальне однопороджене підполе поля раціональних функцій $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$, то тоді $\Bbbk(\varphi)$ алгебраїчно замкнене у $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$. Дійсно, якщо раціональна функція f алгебраїчна над $\Bbbk(\varphi)$, то тоді $\operatorname{tr.deg}_{\Bbbk}(\varphi, f) = 1$ і за Теоремою Гордана (Теорема 2.0.4) $\Bbbk(\varphi, f) = \Bbbk(\psi)$ для деякої раціональної функції ψ. Але тоді з максимальності поля $\Bbbk(\varphi)$ випливає, що $\Bbbk(\psi) = \Bbbk(\varphi)$, а отже $f \in \Bbbk(\varphi)$. $\square$

Зауваження 3.2.3. *Відзначимо, що з властивостей степеня раціональних функцій випливає, що $\Bbbk(\varphi)$ є максимальним однопородженим підполем в полі раціональних функцій $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ тоді й лише тоді, коли раціональна функція φ нерозкладна, тобто із рівності $\varphi = F(\psi)$ для деяких раціональних функцій $\psi \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n) \setminus \Bbbk$ і $F(t) \in \Bbbk(t)$ випливає $\deg F = 1$.*

Наступна лема гарантує, що замкнені многочлени є замкненими як раціональні функції.

Лема 3.2.4. *Нехай $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$. Тоді многочлен f замкнений (тобто розширення кілець $\Bbbk[f] \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ є цілим) тоді і лише тоді, коли f замкнений як раціональна функція.*

Доведення. Доведення випливає з Леми 2.0.2, що є загальним фактом з комутативної алгебри. Дійсно достатньо довести, що з цілості розширення кілець $\Bbbk[f] \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ випливає алгебраїчна замкненість підполя $\Bbbk(f) \subseteq \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$. Але оскільки розширення $\Bbbk[f] \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ ціле і кільце многочленів $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ є нормальною областю цілісності, то за Лемою 2.0.2 маємо, що розширення

$$\Bbbk(f) = Q(\Bbbk[f]) \subseteq Q(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]) = \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$$

є також цілим. $\square$

Зауваження 3.2.5. *Відзначимо, що Якобієві раціональні функції, тобто такі $f \in \Bbbk(x_1, \dots, x_n)$, для яких існує раціональна функція $g \in \Bbbk(x_1, \dots, x_n)$ з умовою $[f, g] \in \Bbbk^*$, не є, взагалі кажучи, замкненими.*

Доведення. Дійсно, розглянемо, наприклад, раціональні функції від двох змінних $f = \frac{1}{x^2}$ та $g = x^3 y$. Тоді

$$[f, g] = [\frac{1}{x^2}, x^3 y] = -\frac{2}{x^3} \cdot x^3 = -2 \neq 0,$$

але $f = \frac{1}{x^2} = (\frac{1}{x})^2$, очевидно, не є замкненою функцією за Лемою 3.2.2 і зауваженням після неї. $\square$

Означення 3.2.3. *Раціональна функція $\tilde{\psi}$ називається породжуючою для раціональної функції ψ, якщо $\tilde{\psi}$ замкнена і $\psi \in \Bbbk(\tilde{\psi})$.*

Лема 3.2.6. *Для довільної раціональної функції $\varphi \in \Bbbk(x_1, \dots, x_n) \setminus \Bbbk$ існує породжуюча функція $\tilde{\varphi}$. Якщо $\tilde{\varphi}_1$ і $\tilde{\varphi}_2$ дві породжуючі раціональні функції для φ, тоді $\Bbbk(\tilde{\varphi}_1) = \Bbbk(\tilde{\varphi}_2)$ і $\tilde{\varphi}_2 = \frac{a\tilde{\varphi}_1 + b}{c\tilde{\varphi}_1 + d}$ для деяких $a, b, c, d \in \Bbbk$, що задовольняють умову $ad - bc \neq 0$.*

Доведення. Підполе $\Bbbk(\varphi)$ міститься у деякому максимальному однопородженому підполі $\Bbbk(\tilde{\varphi})$, яке за першою частиною даної леми є алгебраїчно замкненим у $\Bbbk(x_1, \dots, x_n)$. Тому $\tilde{\varphi}$ породжуюча раціональна функція для φ.

Нехай $\tilde{\varphi}_1$ і $\tilde{\varphi}_2$ дві породжуючі функції для φ. Тоді $\tilde{\varphi}_1$ та $\tilde{\varphi}_2$ є алгебраїчними елементами над полем $\Bbbk(\varphi)$, отже $\operatorname{tr.deg}_{\Bbbk} \Bbbk(\varphi, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = 1$. Зокрема, звідси випливає, що функції $\tilde{\varphi}_1$ і $\tilde{\varphi}_2$ алгебраїчно залежні.

За Лемою 2.0.15 ми отримуємо, що $\tilde{\varphi}_1 \in \Bbbk(\psi)$, $\tilde{\varphi}_2 \in \Bbbk(\psi)$ для деякої раціональної функції ψ. Оскільки обидві функції $\tilde{\varphi}_1$ та $\tilde{\varphi}_2$ замкнені, а отже породжують максимальні однопороджені підполя у полі усіх раціональних функцій, маємо $\Bbbk(\tilde{\varphi}_1) = \Bbbk(\psi) = \Bbbk(\tilde{\varphi}_2)$. Але оскільки існує таке дробово-раціональне перетворення θ поля $\Bbbk(\psi)$, що $\theta(\tilde{\varphi}_2) = \tilde{\varphi}_1$, робимо висновок, що $\tilde{\varphi}_2 = \frac{a\tilde{\varphi}_1 + b}{c\tilde{\varphi}_1 + d}$ для деяких $a, b, c, d \in \Bbbk$, $ad - bc \neq 0$. $\square$

Із існування породжуючих раціональних функцій випливає наступне уточнення Леми 2.0.15.

Лема 3.2.7. *Нехай φ і ψ алгебраїчно залежні раціональні функції від n змінних. Тоді існує спільна для φ і ψ породжуюча функція ϕ і, таким чином, множини породжуючих функцій для φ та ψ співпадають.*

Доведення. Дійсно, якщо φ і ψ дві алгебраїчно залежні раціональні функції, то за Лемою 2.0.15 існує $\phi_0 \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$, така що $\varphi = F(\phi_0)$ і $\psi = G(\phi_0)$ для деяких раціональних функцій $F(t), G(t) \in \Bbbk(t)$. Розгляньмо породжуючу для ϕ_0 раціональну функцію ϕ, що існує за Лемою 3.2.6. Тоді ϕ також є породжуючою як для φ, так і для ψ. За Лемою 3.2.6 множина генераторів підполя $\Bbbk(\phi)$ є множиною породжуючих функцій для φ і ψ. $\square$

Нагадаємо, що над алгебраїчно замкненим полем довільний незвідний многочлен є замкненим (див. Лему 3.1.3). Аналогом цього факту для раціональних функцій є наступна теорема, що дає широкий клас прикладів замкнених раціональних функцій.

Теорема 3.2.8. *Нехай поле $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$ алгебраїчно замкнене. Нехай многочлени $f, g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ взаємно прості і алгебраїчно незалежні. Якщо хоча б один з них незвідний, то раціональна функція $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена.*

Доведення. Без обмеження загальності припустимо, що многочлен f незвідний. За Лемою 3.2.6 існує породжуюча раціональна функція $\psi = \frac{p}{q}$ для φ, де p і q взаємнопрості многочлени. Тоді $\varphi = \frac{P(\psi)}{Q(\psi)}$ для деяких взаємнопростих многочленів $P(t), Q(t) \in \Bbbk[t]$.

Нехай $P(t) = a_0(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_m)$ і $Q(t) = b_0(t - \mu_1) \ldots (t - \mu_l)$, $\lambda_i, \mu_j \in \Bbbk$ розклади $P(t)$ і $Q(t)$ на незвідні множники. Тоді

$$\varphi = \frac{f}{g} = \frac{a_0(\frac{p}{q} - \lambda_1) \ldots (\frac{p}{q} - \lambda_m)}{b_0(\frac{p}{q} - \mu_1) \ldots (\frac{p}{q} - \mu_l)} = \frac{a_0(p - \lambda_1 q) \ldots (p - \lambda_m q) q^{l-m}}{b_0(p - \mu_1 q) \ldots (p - \mu_l q)},$$

і ми отримуємо

$$b_0 f(p-\mu_1 q)\dots(p-\mu_l q) = a_0 g(p-\lambda_1 q)\dots(p-\lambda_m q)q^{l-m}. \tag{3.1}$$

Оскільки p і q взаємнопрості, зрозуміло, що многочлен q взаємнопростий із многочленами вигляду $p+\alpha q$, $\alpha \in \Bbbk$. Більше того, зауважмо, що оскільки $\lambda_i \neq \mu_j$, многочлени $p-\lambda_i q$ та $p-\mu_j q$ є взаємнопростими для усіх $i=\overline{1,l}$ та $j=\overline{1,m}$. Дійсно, довільний їх спільний дільник має ділити їх різницю $p-\lambda_i q-(p-\mu_j q) = (\mu_j-\lambda_i)q$, отже ділить q, а значить і p. Але многочлени p та q взаємнопрості за припущенням. Отже многочлени $p-\lambda_i q$ та $p-\mu_j q$ можуть мати лише тривіальні спільні дільники.

Зауважимо також, що $p-\beta q \notin \Bbbk$. Дійсно, якщо $p-\beta q=\xi \in \Bbbk$ для деяких $\beta,\xi \in \Bbbk$, тоді $p=\xi+\beta q$ і

$$\varphi = \frac{f}{g} = \frac{a_0(\xi+(\beta-\lambda_1)q)\dots(\xi+(\beta-\lambda_m)q)q^{l-m}}{b_0(\xi+(\beta-\mu_1 q)\dots(\xi+(\beta-\mu_l)q)},$$

звідки випливає, що f та g містяться у $\Bbbk[q]$, а значить є алгебраїчно залежними, що протирічить нашим припущенням.

Отже з (3.1) робимо висновок, що f ділиться на усі многочлени $(p-\lambda_i q)$. Оскільки f незвідний, приймаючи до уваги сказане вище, отримуємо, що $m=1$ і $f=a(p-\lambda_1 q)$, $a\in\Bbbk^*$. Тому із (3.1) одержуємо

$$b_0 a(p-\lambda_1 q)(p-\mu_1 q)\dots(p-\mu_l q) = a_0 g(p-\lambda_1 q)q^{l-1}$$

і після скорочення

$$b_0 a(p-\mu_1 q)\dots(p-\mu_l q) = a_0 g q^{l-1}.$$

Оскільки многочлен q взаємнопростий із многочленами $(p-\mu_j q)$, маємо $l=1$ і зрештою $a_0 g = b_0 a(p-\mu_1 q)$. Таким чином отримуємо

$$\varphi = \frac{f}{g} = \frac{a_0(p-\lambda_1 q)}{b_0(p-\mu_1 q)} = \frac{a_0(\frac{p}{q}-\lambda_1)}{b_0(\frac{p}{q}-\mu_1)} = \frac{a_0(\psi-\lambda_1)}{b_0(\psi-\mu_1)},$$

звідки випливає, що $\Bbbk(\varphi) = \Bbbk(\psi)$. Це означає, що φ замкнена раціональна функція. $\square$

Приклад 3.2.9. *Нехай $f \in \Bbbk[x]$ довільний незвідний многочлен від однієї змінної x. Нехай $g \in \Bbbk[y]$ довільний многочлен від однієї змінної y. Тоді $\frac{f}{g}$ замкнена раціональна функція за Теоремою 3.2.8.*

3.3 Раціональні функції і пучки гіперповерхонь

В цьому підрозділі дається характеризація замкнених раціональних функцій в термінах пучків гіперповерхонь. У доведенні Теореми 3.3.2 використовується підхід із статті J.M.Ollagnier [46] пов'язаний з многочленами Дарбу. Нагадаємо деякі поняття і термінологію (див. також [41], стор. 22-24).

Для раціональної функції $\varphi = \frac{f}{g} \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n) \setminus \Bbbk$ визначимо відображення

$$\delta_\varphi = gdf - fdg : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Lambda^2 \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$$

за правилом

$$\delta_\varphi(h) = dh \wedge (gdf - fdg). \tag{3.2}$$

Коефіцієнти $2-$форми $dh \wedge (gdf - fdg)$ є диференціюваннями кільця многочленів $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ (насправді, образами h під дією цих диференціювань). Тому можемо розглядати δ_φ у якості (векторного) диференціювання (див. Означення 2.0.9).

Нагадаємо (див. Означення 2.0.10), що многочлен h називається многочленом Дарбу диференціювання δ_φ якщо усі коефіцієнти $2-$форми $dh \wedge (gdf - fdg)$ діляться на многочлен h, іншими словами, $dh \wedge (gdf - fdg) = h \cdot \lambda$ для деякої $2-$форми λ, яка називається комножником диференціювання δ_φ.

Лема 3.3.1. *Для довільних $\alpha, \beta \in \Bbbk$ многочлен $\alpha f + \beta g$ є многочленом Дарбу диференціювання δ_φ, зокрема кожен дільник многочлена $\alpha f + \beta g$ є многочленом Дарбу диференціювання $\delta_\varphi = gdf - fdg$.*

Доведення. Випливає із наступної рівності

$d(\alpha f + \beta g) \wedge (gdf - fdg) = -(\alpha f + \beta g)df \wedge dg$

і із Леми 2.0.6, де відзначено, що дільник многочлена Дарбу є також многочленом Дарбу. □

Теорема 3.3.2. *Нехай многочлени $f, g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ взаємно прості і хоча б один з них не є сталим многочленом. Тоді раціональна функція $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена тоді і лише тоді, коли у пучку гіперповерхонь $\alpha f + \beta g$ усі, крім можливо скінченного числа, гіперповерхні є незвідними.*

Доведення. Нехай $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена раціональна функція. Припустимо, що пучок гіперповерхонь $\alpha f + \beta g$ містить нескінченно багато звідних гіперповерхонь. Нехай

$$\{\alpha_i f + \beta_i g\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad (\alpha_i : \beta_i) \neq (\alpha_j : \beta_j)$$

для $i \neq j$ (як точки проективного простору $\mathbb{P}^1$), це нескінченна послідовність різних звідних гіперповерхонь. Для кожного i зафіксуємо незвідний множник h_i многочлену $\alpha_i f + \beta_i g$.

За Лемою 3.3.1 усі многочлени h_i є многочленами Дарбу для диференціювання δ_φ, причому $\deg h_i < \deg \varphi =: k$. За Теоремою 2.0.7 існує лише скінченна кількість комножників δ_φ, які відповідають многочлену Дарбу h_i (зауважмо, що степені многочленів h_i обмежені). Тому існують многочлени h_i та h_j такі, що $\delta_\varphi(h_i) = \lambda h_i$ та $\delta_\varphi(h_j) = \lambda h_j$ для деякого комножника $\lambda \in \bigwedge^2 \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Звідси випливає, що $\delta_\varphi(\frac{h_i}{h_j}) = 0$ і тому, враховуючи (3.2), ми отримуємо

$$d(\frac{h_i}{h_j}) \wedge d(\frac{f}{g}) = \frac{1}{g^2}\delta_\varphi(\frac{h_i}{h_j}) = 0.$$

За Лемою 2.0.15, раціональні функції $\varphi = \frac{f}{g}$ та $\frac{h_i}{h_j}$ алгебраїчно залежні. Оскільки φ замкнена, то $\frac{h_i}{h_j} = F(\varphi)$ для деякої раціональної функції від однієї змінної $F(t) \in \Bbbk(t)$, і тому $\deg \frac{h_i}{h_j} = \deg F \deg \varphi$ (див. Лему 3.2.1). Але це неможливо, бо

$\deg \frac{h_i}{h_j} < \deg \varphi$. Отже, отримане протиріччя доводить, що усі, крім, можливо, скінченного числа, гіперповерхні в $\alpha f + \beta g$ є незвідними.

Нехай тепер $\alpha_0 f + \beta_0 g$ незвідна гіперповерхня з пучка гіперповерхонь $\alpha f + \beta g$. Розгляньмо спочатку випадок, коли f та g алгебраїчно незалежні. Без обмеження загальності припустимо, що $\alpha_0 \neq 0$. Тоді многочлени $\alpha_0 f + \beta_0 g$ та g алгебраїчно незалежні також. (Якщо $\alpha_0 = 0$, то тоді $\beta_0 \neq 0$ і многочлени f та $\alpha_0 f + \beta_0 g$ є алгебраїчно незалежними). Отже, оскільки $\alpha_0 f + \beta_0 g$ і g взаємнопрості, за Теоремою 3.2.8 раціональна функція $\psi = \frac{\alpha_0 f + \beta_0 g}{g}$ замкнена. Оскільки $\varphi = \frac{f}{g} = \alpha_0^{-1}(\psi - \beta_0)$, то раціональна функція φ теж замкнена.

Залишається розглянути випадок, коли многочлени f та g алгебраїчно залежні. У цьому випадку, за Лемою 3.1.9, $f = F(h)$ і $g = G(h)$ для спільного породжуючого многочлена h і многочленів $F(t), G(t) \in \mathbb{k}[t]$. Нехай $(1 : \beta_1) \neq (1 : \beta_2)$ дві точки у $\mathbb{P}^1$, такі що многочлен $f + \beta_i g$ незвідний для $i \in \{1, 2\}$. Отже $f + \beta_i g = F(h) + \beta_i G(h)$ незвідний для $i \in \{1, 2\}$. Зокрема, це означає, що $\deg(F(t) + \beta_i G(t)) = 1$, тобто

$$F(t) + \beta_i G(t) = a_i t + b_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{k}, \quad a_i \neq 0.$$

Оскільки $\beta_1 \neq \beta_2$, робимо висновок, що $F(t) = at + b$ і $G(t) = ct + d$ для деяких $a, b, c, d \in \mathbb{k}$, і тому $\varphi = \frac{f}{g} = \frac{ah+b}{ch+d}$. Оскільки щонайменше один з многочленів f і g відмінний від константи, і оскільки многочлени f та g взаємнопрості, отримуємо, що $\mathbb{k}(\varphi) = \mathbb{k}(h)$. Із замкненості многочлена h ($\mathbb{k}(h)$ алгебраїчно замкнене підполе у полі $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$) випливає, що $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена раціональна функція. $\square$

Зауваження 3.3.3. *Відзначимо, що з доведення Теореми 3.3.2 випливає, що функція $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена, якщо у пучку гіперповерхонь $\alpha f + \beta g$ є щонайменше дві різні незвідні гіперповерхні. Однієї незвідної гіперповерхні достатньо, якщо многочлени f та g алгебраїчно незалежні.*

Зауваження 3.3.4. *З Теореми 3.3.2 випливає також слабка версія (ми не наводимо оцінки на кількість) наступного результату В. Рупперта (див. [53], Satz 6, а також [59] та [35]).*

Якщо f та g алгебраїчно незалежні многочлени і пучок гіперповерхонь $\alpha f + \beta g$ містить щонайменше одну незвідну гіперповерхню, тоді усі, за винятком, можливо, скінченного числа, гіперповерхні в $\alpha f + \beta g$ є незвідними.

Зауваження 3.3.5. *Нехай $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ многочлен відмінний від константи, тоді f за Теоремою 3.3.2 і Лемою 3.2.4 замкнений тоді і лише тоді, коли многочлен $f + \lambda$ незвідний для усіх, крім, можливо, скінченного числа, $\lambda \in \Bbbk$.*

Цей результат є добре відомим, див. Теорему 3.1.10. Його можна довести використовуючи теорему Бертіні, див. [54], Theorem 3.3.37, стор. 217.

Наслідок 3.3.6. *Нехай $f, g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ два алгебраїчно незалежні, взаємно прості многочлени, причому щонайменше один з них незвідний. Тоді многочлен $f + \lambda g$ незвідний для усіх, крім, можливо, скінченного числа $\lambda \in \Bbbk$.*

Доведення. За Теоремою 3.2.8 раціональна функція $\frac{f}{g}$ замкнена. Тому, за Теоремою 3.3.2, $f+\lambda g$ незвідний для усіх, крім, можливо, скінченного числа $\lambda \in \Bbbk$. $\square$

У випадку алгебраїчно замкненого поля характеристики нуль довільний многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \setminus \Bbbk$ можна записати у вигляді $f = F(h)$ для деякого многочлена $F(t) \in \Bbbk[t]$ і незвідного многочлена $h \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ (див. Наслідок 3.1.11). Аналогічне твердження має місце і для раціональний функцій.

Наслідок 3.3.7. *Раціональна функція $\frac{f}{g} \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n) \setminus \Bbbk$ може бути записана у вигляді $\frac{f}{g} = F(\frac{p}{q})$, для деякої раціональної функції $F(t) \in \Bbbk(t)$ і деяких незвідних многочленів p та q.*

Доведення. Нехай $\frac{p_1}{q_1}$ породжуюча раціональна функція для $\frac{f}{g}$. Оскільки $\frac{p_1}{q_1}$ замкнена, за Теоремою 3.3.2 пучок гіперповерхонь $\alpha p_1 + \beta q_1$ містить дві різні незвідні гіперповерхні $p = \alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1$ і $q = \alpha_2 p_1 + \beta_2 q_1$, тобто $(\alpha_1 : \beta_1) \neq (\alpha_2 : \beta_2)$. Остання умова означає $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, тобто визначник матриці $\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{smallmatrix}\right)$ відмінний від нуля. Оскільки $\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ q_1 \end{smallmatrix}\right)$, обертаючи матрицю $\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{smallmatrix}\right)$ отримаємо $\left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ q_1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1' & \beta_1' \\ \alpha_2' & \beta_2' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right)$ для деяких α_1', α_2', β_1' та β_2'. Отже пучки гіперповерхонь $\alpha p + \beta q$ та $\alpha p_1 + \beta q_1$ рівні, і оскільки у пучку $\alpha p_1 + \beta q_1$ усі, крім, можливо, скінченного числа, гіперповерхні незвідні, за Теоремою 3.3.2 робимо висновок, що $\frac{p}{q}$ замкнена раціональна функція, а також

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\alpha_1' p + \beta_1' q}{\alpha_2' p + \beta_2' q} = \frac{\alpha_1' \cdot \frac{p}{q} + \beta_1'}{\alpha_2' \cdot \frac{p}{q} + \beta_2'},$$

тобто $\frac{p_1}{q_1}$ міститься у $\Bbbk(\frac{p}{q})$ і, значить, $\frac{f}{g} \in \Bbbk(\frac{p_1}{q_1}) \subseteq \Bbbk(\frac{p}{q})$. Останнє означає, що $\frac{p}{q}$ є породжуючою функцією для $\frac{f}{g}$. Ми довели, що чисельник і знаменник породжуючої функції завжди можна обрати незвідними многочленами. $\square$

Зауваження 3.3.8. *В умовах Наслідку 3.3.7 многочлени p і q можна вибрати так, щоб вони мали однаковий степінь.*

Доведення. Якщо степінь одного з многочленів p_1 та q_1 більше за степінь іншого, скажімо, $\deg p_1 > \deg q_1$, то бажаного результату можна досягнути обираючи коефіцієнти α_1 та α_2 відмінними від нуля, іншими словами, покладаючи $p = p_1 + \beta_1 q_1$ та $q = p_1 + \beta_2 q_2$. Дійсно, усі многочлени вигляду $p_1 + \beta q_1$ (а їх нескінченна кількість) мають однаковий степінь і у цьому випадку $\deg p = \deg p_1 = \deg q$.

Якщо ж степені многочленів p_1 та q_1 рівні, то тоді в пучку гіперповерхонь $\alpha p_1 + \beta q_1$ щонайбільше один (з точністю до множення на відмінну від нуля константу, тобто щонайбільше для однієї точки $(\alpha : \beta)$) многочлен має степінь менший від степеня многочленів p_1 та q_1, степені ж усіх інших многочленів рівні і співпадають із степенем p_1 та q_1. Тому ми можемо серед нескінченного числа таких многочленів обрати два незвідних. $\square$

Наслідок 3.3.9. *Нехай* $\Bbbk \subseteq L \subseteq \Bbbk(x_1, \dots, x_n)$ *алгебраїчно замкнене підполе у полі раціональних функцій* $\Bbbk(x_1, \dots, x_n)$. *Тоді можна обрати твірні* L *вигляду* $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$, *де* p_i *і* q_i *незвідні многочлени.*

Доведення. Нехай $f_1, \dots, f_m$ деякі твірні підполя L. За Наслідком 3.3.7 запишемо $f_i = F_i(\frac{p_i}{q_i})$, де $F_i(t) \in \Bbbk(t)$, і p_i та q_i є незвідними многочленами для усіх $i = \overline{1, m}$. Отже раціональні функції $\frac{p_i}{q_i}$ є алгебраїчними елементами над L. Оскільки підполе L алгебраїчно замкнене, то $\frac{p_i}{q_i} \in L$ і тому

$$L = \Bbbk(f_1, \dots, f_m) = \Bbbk(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}).$$

□

Теорема 3.3.10. *Нехай многочлени* $f, g \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ *взаємнопрості і алгебраїчно незалежні. Тоді раціональна функція* f/g *не є замкненою тоді і лише тоді, коли існують алгебраїчно незалежні незвідні многочлени* p *і* q *і натуральне число* $k \geqslant 2$ *такі, що*

$$f = (\alpha_1 p + \beta_1 q) \dots (\alpha_k p + \beta_k q) \quad \text{та} \quad g = (\gamma_1 p + \delta_1 q) \dots (\gamma_k p + \delta_k q)$$

для деяких $(\alpha_i : \beta_i), (\gamma_j : \delta_j) \in \mathbb{P}^1$, *із* $(\alpha_i : \beta_i) \neq (\gamma_j : \delta_j)$, $i, j = \overline{1, k}$.

Доведення. Припустімо, що $\frac{f}{g}$ незамкнена раціональна функція. Розгляньмо її породжуючу функцію $\frac{p}{q}$ з незвідними многочленами p та q. Це можливо за Наслідком 3.3.7. Тоді $\frac{f}{g} = F(\frac{p}{q})$ для деякої раціональної функції $F(t) \in \Bbbk(t)$ з $\deg F(t) = k \geqslant 2$. Зауважмо, що многочлени p та q алгебраїчно незалежні, в протилежному випадку многочлени f та g були б алгебраїчно залежними, що суперечило б нашим припущенням. Запишемо

$$F(t) = \frac{a_0(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_s)}{b_0(t - \mu_1) \dots (t - \mu_r)}$$

з $\lambda_i \neq \mu_j$, тобто із взаємнопростими чисельником і знаменником. Зрозуміло, що $k = \deg F(t) = \max\{s, r\}$. Після підстановки замість t раціональної функції $\frac{p}{q}$

отримуємо

$$\frac{f}{g} = \frac{a_0(p - \lambda_1 q) \dots (p - \lambda_s q) q^{r-s}}{b_0(p - \mu_1 q) \dots (p - \mu_r q)}.$$

Покладемо $(\alpha_i : \beta_i) = (1 : -\lambda_i)$ для $i = \overline{1, s}$, $(\gamma_j : \delta_j) = (1 : -\mu_j)$ для $j = \overline{1, r}$. Якщо $r \leqslant s$, то покладімо $(\gamma_j : \delta_j) = (0 : 1)$ для $j = r + 1, \dots, s$. Якщо ж $r > s$, то нехай $(\alpha_i : \beta_i) = (0 : 1)$ для $i = s + 1, \dots, r$. Ми отримали

$$\frac{f}{g} = \frac{a_0(\alpha_1 p + \beta_1 q) \dots (\alpha_k p + \beta_k q)}{b_0(\gamma_1 p + \delta_1 q) \dots (\gamma_k p + \delta_k q)},$$

що означає, що, із точністю до множення на відмінну від нуля константу, $f = (\alpha_1 p + \beta_1 q) \dots (\alpha_k p + \beta_k q)$ та $g = (\gamma_1 p + \delta_1 q) \dots (\gamma_k p + \delta_k q)$.

Нехай тепер f та g мають вигляд, як вказано в умовах теореми. Ми покажемо, що раціональна функція $\frac{f}{g}$ незамкнена. Оскільки $f = (\alpha_1 p + \beta_1 q) \dots (\alpha_k p + \beta_k q)$ та $g = (\gamma_1 p + \delta_1 q) \dots (\gamma_k p + \delta_k q)$, маємо

$$\frac{f}{g} = \frac{(\alpha_1 p + \beta_1 q) \dots (\alpha_k p + \beta_k q)}{(\gamma_1 p + \delta_1 q) \dots (\gamma_k p + \delta_k q)} = \frac{(\alpha_1 \frac{p}{q} + \beta_1) \dots (\alpha_k \frac{p}{q} + \beta_k)}{(\gamma_1 \frac{p}{q} + \delta_1) \dots (\gamma_k \frac{p}{q} + \delta_k)},$$

тобто $\frac{f}{g} = F(\frac{p}{q})$ для раціональної функції $F(t) = \frac{(\alpha_1 t + \beta_1) \dots (\alpha_k t + \beta_k)}{(\gamma_1 t + \delta_1) \dots (\gamma_k t + \delta_k)}$. Оскільки $(\alpha_i : \beta_i) \neq (\gamma_j : \delta_j)$, $i, j = \overline{1, k}$, одержуємо, що $\deg F(t) \geqslant 2$, звідки випливає, що $\frac{f}{g}$ незамкнена □

Приклад 3.3.11. *Нехай p та q незвідні алгебраїчно незалежні многочлени з $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, $n \geqslant 2$. Тоді $\varphi = \frac{p^l}{q^m}$ замкнена раціональна функція для взаємно-простих l і m.*

Дійсно, припустимо обернене. Тоді за Теоремою 3.3.10 існують незвідні многочлени p_1 та q_1, натуральне число $k \geqslant 2$ такі, що

$$\frac{p^l}{q^m} = \frac{(\alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1) \dots (\alpha_k p_1 + \beta_k q_1)}{(\gamma_1 p_1 + \delta_1 q_1) \dots (\gamma_k p_1 + \delta_k q_1)}, \quad (\alpha_i : \beta_i) \neq (\gamma_j : \delta_j), \quad i, j = \overline{1, k}.$$

Оскільки $\alpha_i p_1 + \beta_i q_1$ та $\gamma_j p_1 + \delta_j q_1$ взаємнопрості для усіх i та j, маємо, що

$$p^l = (\alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1) \dots (\alpha_k p_1 + \beta_k q_1)$$

та $q^m = (\gamma_1 p_1 + \delta_1 q_1)\dots(\gamma_k p_1 + \delta_k q_1)$. Оскільки p і q алгебраїчно незалежні, як і у доведенні Теореми 3.2.8 ми робимо висновок, що $\alpha p_1 + \beta q_1 \notin \mathbb{k}$ для усіх $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1$. Отже, $(\alpha_1 : \beta_1) = \dots = (\alpha_k : \beta_k)$, $(\gamma_1 : \delta_1) = \dots = (\gamma_k : \delta_k)$, та

$$p^l = a_0(\alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1)^k, \quad q^m = b_0(\gamma_1 p_1 + \delta_1 q_1)^k.$$

Оскільки многочлени p та q незвідні, робимо висновок, що, з точністю до множення на відміну від нуля константу, $\alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1 = p^{l'}$ і $\gamma_1 p_1 + \delta_1 q_1 = q^{m'}$, тобто $k \geqslant 2$ ділить як l, так і m. Це неможливо , бо l та m взаємнопрості. Ми отримали протиріччя, що доводить, що $\frac{p^l}{q^m}$ замкнена раціональна функція.

3.4 Добутки незвідних многочленів

Теорема 3.4.1. *Нехай* $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ *незвідні алгебраїчно незалежні многочлени. Якщо* $\gcd(m_1, m_2, \dots m_k) = 1$*, тоді многочлен*

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} + \lambda$$

незвідний для усіх, крім, можливо, скінченного числа, $\lambda \in \mathbb{k}$*.*

Доведення. Ми покажемо спочатку, що многочлен $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ замкнений. Припустімо, що це не так, й нехай $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} = F(h)$ для деякого замкненого многочлена h і многочлена від однієї змінної $F(t) \in \mathbb{k}[t]$, $\deg F(t) \geqslant 2$. Нехай $F(t) = \alpha(t - \mu_1)\dots(t - \mu_s)$ розклад многочлена $F(t)$ на незвідні множники. Тоді

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} = \alpha(h - \mu_1)\dots(h - \mu_s), \quad \mu \in \mathbb{k}, \quad \alpha \in \mathbb{k}^*.$$

Оскільки многочлени $h - \mu_i$ замкнені, і оскільки ми припустили, що многочлен $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ незамкнений, отримуємо, що $s \geqslant 2$. Припустімо, що існує $\mu_i \neq \mu_j$, без обмеження загальності припускаємо $\mu_1 \neq \mu_2$. Оскільки усі многочлени p_i незвідні, робимо висновок, що $h - \mu_1 = \alpha_1 p_{i_1}^{s_1} \dots p_{i_m}^{s_m}$ та $h - \mu_2 = \alpha_2 p_{j_1}^{t_1} \dots p_{j_r}^{t_r}$ для $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}, p_{j_1}, \dots, p_{j_r} \in \{p_1, \dots, p_k\}$. Оскільки $\mu_1 \neq \mu_2$, многочлени $h - \mu_1$ та

$h-\mu_2$ взаємнопрості. Тому множини $\{p_{i_1},\ldots,p_{i_m}\}$ та $\{p_{j_1},\ldots,p_{j_r}\}$ диз'юнктні. Із $(h-\mu_1)-(h-\mu_2)+(\mu_1-\mu_2)=0$ випливає

$$\alpha_1 p_{i_1}^{s_1}\ldots p_{i_m}^{s_m}-\alpha_2 p_{j_1}^{t_1}\ldots p_{j_r}^{t_r}+(\mu_1-\mu_2)=0,$$

що означає, що множина $\{p_1,\ldots,p_k\}$ алгебраїчно залежна. Ми отримали протиріччя. Отже $\mu_1=\cdots=\mu_s$ і $p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k}=\alpha(h-\mu_1)^s$, $s\geqslant 2$. З однозначності розкладу многочлена $p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k}$ на незвідні множники випливає, що $s|m_1,\ldots,s|m_k$, але це неможливо з огляду на наші обмеження на числа $m_1,\ldots,m_k$. Це протиріччя доводить, що многочлен $p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k}$ замкнений. За Зауваженням 3.3.5 многочлен $p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k}+\lambda$ незвідний для усіх, крім, можливо, скінченного числа, $\lambda\in\Bbbk$. □

Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджуються замкнені многочлени і раціональні функції. Підрозділ 3.1 присвячено замкненим многочленам, в ньому означено замкнені многочлени, зібрано деякі відомі результати про замкнені многочлени а також зібрано і доведено важливі допоміжні твердження, що використовуватимуться у подальшому викладі, зокрема для опису централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в розділі 4. Це, зокрема, Лема 3.1.8 про існування породжуючих многочленів, та про їх єдиність з точністю до афінного перетворення.

Підрозділ 3.2 присвячено замкненим раціональним функціям. В цьому підрозділі також доведено необхідні допоміжні твердження, важливі для подальшого викладу, зокрема, це Лема 3.2.6 про існування породжуючих раціональних функцій. Основними у цьому підрозділі є нові результати пов'язані з характеризацією замкнених раціональних функцій. Ці результати було опубліковано в статті [50]. Теорема 3.2.8 є достатньою умовою замкненості раціональної функції. Теорема 3.3.2 є критерієм замкненості раціональної функції. Ця теорема є узагальненням критерію замкненості многочленів — Теореми 3.1.10. Теорема 3.3.10 дає опис незамкнених раціональних функцій. Теорема 3.4.1 є достатньою умовою замкненості добутку незвідних многочленів.

Розділ 4

Алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$

У цьому розділі досліджуються централізатори елементів і максимальні абелеві підалгебри в деяких нескінченновимірних алгебрах Лі L над полем $\Bbbk$. Першою і найважливішою з них є алгебра Лі (насправді Пуассонова алгебра) $P_2(\Bbbk)$, в якій дужка Лі задається взяттям якобіана від двох заданих многочленів. З точки зору структурної теорії ця алгебра Лі мало вивчена (наприклад невідомо, чи містить вона власні підалгебри, які ізоморфні їй самій, не описані в ній навіть неабелеві підалгебри розмірності 2), тому вивчення структури підалгебр цієї алгебри є актуальною задачею. Оскільки дужка Лі в цій алгебрі Лі використовує частинні похідні многочленів, то чисто алгебраїчні властивості многочленів, які відносяться до подільності, нерозкладності тощо, пов'язуються з диференціюваннями, що і ускладнює вивчення алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$. Основні результати цього розділу дають опис централізаторів елементів в цій алгебрі Лі, а також описують її максимальні абелеві підалгебри. Крім того, отримано опис власних векторів диференціювань вигляду $\mathrm{ad}(a)$, де елемент $a \in P_2(\Bbbk)$. Підходи, які використовуються при цьому дозволяють розглянути аналогічні задачі для алгебри Лі $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$, а також розглянути випадок простої характеристики (зауважимо, що в простій характеристиці ситуація радикально відрізняється від характеристики нуль).

4.1 Алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$ в характеристиці нуль

Нагадаємо, що алгебра Лі $P_n(\Bbbk)$ є кільцем многочленів від двох змінних із дужкою Лі

$$[f,g] = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Наступні два твердження було доведено в роботі [48] для $n = 2$ використовуючи Теорему 2.0.9, що була доведена в [43]. Те саме доведення працює і у випадку довільного n, потрібно лише використовувати Теорему 2.0.11, що була доведена в [58].

Твердження 4.1.1. *Для довільного многочлена $f \in P_n(\Bbbk) \setminus \Bbbk$ його централізатор $C_{P_n(\Bbbk)}(f)$ співпадає із алгеброю $\Bbbk[h]$, породженою довільним породжуючим для f многочленом h.*

Доведення. За Теоремою 2.0.11 $C_{P_n(\Bbbk)}(f) = \ker \operatorname{ad}(f) = \Bbbk[h]$ для деякого многочлена h. Оскільки за Лемою 2.0.8 $\ker \operatorname{ad}(f)$ є цілозамкненою підалгеброю у $P_n(\Bbbk) = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, многочлен h замкнений і f, очевидно, міститься в $C_{P_n(\Bbbk)} = \Bbbk[h]$. □

Твердження 4.1.2. *Нехай A максимальна абелева підалгебра в алгебрі Лі $P_n(\Bbbk)$. Тоді $A = \Bbbk[f]$ для деякого замкненого многочлена $f \in P_n(\Bbbk) \setminus \Bbbk$. Навпаки, для довільного замкненого многочлена $f \in P_n(\Bbbk) \setminus \Bbbk$, підалгебра $\Bbbk[f]$ є максимальною абелевою підалгеброю в $P_n(\Bbbk)$.*

У випадку алгебраїчно замкненого поля $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$, множиною максимальних абелевих підалгебр в $P_n(\Bbbk)$ є множина алгебр вигляду $\Bbbk[f]$, де f незвідний многочлен.

Доведення. Нехай A максимальна абелева підалгебра в алгебрі Лі $P_n(\Bbbk)$ і нехай g довільний відмінний від константи многочлен з A. Очевидно, $A \subseteq$

$C_{P_n(\Bbbk)}(g) = \Bbbk[f]$ для деякого замкненого многочлена f. Оскільки $\Bbbk[f]$ є абелевою підалгеброю, маємо $A = \Bbbk[f]$.

Тепер нехай f замкнений многочлен. Потрібно показати, що $\Bbbk[f]$ максимальна абелева підалгебра в $P_n(\Bbbk)$. Нехай g многочлен, що комутує з f, тобто $[f,g] = 0$. Тоді $g \in C_{P_n(\Bbbk)}(f)$. Оскільки за Твердженням 4.1.1 маємо $C_{P_n(\Bbbk)}(f) = \Bbbk[f]$, то g міститься в $\Bbbk[f]$. Ми показали, що усі многочлени, які комутують з f, належать підалгебрі $\Bbbk[f]$. Оскільки $\Bbbk[f]$ абелева підалгебра, це доводить, що $\Bbbk[f]$ максимальна абелева підалгебра в $P_n(\Bbbk)$.

У випадку, коли основне поле є алгебраїчно замкненим, за Наслідком 3.1.11 многочлен f завжди можна обрати незвідним. $\square$

Нагадаємо, що алгебра Лі $P_2(\Bbbk)$ є кільцем многочленів від двох змінних із дужкою Лі, що визначається якобіаном:

$$[f,g] := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Нашою метою є вивчення структури підалгебр цієї алгебри. У цьому розділі дається опис централізаторів елементів а також максимальних абелевих підалгебр Лі у алгебрі $P_2(\Bbbk)$, що в розділі 5 буде використано для опису централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$.

Лема 4.1.3. *Центр $Z(P_2(\Bbbk))$ алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$ співпадає з полем $\Bbbk$.*

Доведення. Многочлен f міститься у центрі алгебри $P_2(\Bbbk)$ тоді і лише тоді, коли він комутує з твірними x та y, тобто коли

$$[f,x] = 0, \quad [f,y] = 0.$$

Оскільки $[f,x] = -\frac{\partial f}{\partial y}$ і $[f,y] = \frac{\partial f}{\partial x}$, отримуємо, що f міститься у центрі $P_2(\Bbbk)$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Оскільки характеристика поля $\Bbbk$ нуль, останнє рівносильне до $f \in \Bbbk$. $\square$

Оскільки $P_2(\Bbbk)$ є окремим випадком $P_n(\Bbbk)$ для $n = 2$, ми маємо наступні описи централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в $P_2(\Bbbk)$.

Твердження 4.1.4. *Для довільного многочлена $f \in P_2(\Bbbk) \setminus \Bbbk$ його централізатор $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ співпадає із алгеброю $\Bbbk[h]$, породженою довільним породжуючим для f многочленом h.*

Твердження 4.1.5. *Нехай A максимальна абелева підалгебра в алгебрі Лі $P_2(\Bbbk)$. Тоді $A = \Bbbk[f]$ для деякого замкненого многочлена $f \in P_2(\Bbbk) \setminus \Bbbk$. Навпаки, для довільного незвідного многочлена $f \in P_2(\Bbbk) \setminus \Bbbk$, підалгебра $\Bbbk[f]$ є максимальною абелевою підалгеброю в $P_2(\Bbbk)$.*

У випадку алгебраїчно замкненого поля $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$, множиною максимальних абелевих підалгебр в $P_2(\Bbbk)$ є множина алгебр вигляду $\Bbbk[f]$, де f незвідний многочлен.

Доведення. Обидва твердження є переформулюваннями відповідних тверджень для $P_n(\Bbbk)$ у випадку $n = 2$. □

Приклад 4.1.6. *Розглянемо многочлен $f = x^2y^2 + xy$. Тоді для многочлена $F(t) = t^2 + t$ маємо $f = F(xy)$. Оскільки многочлен xy є замкненим (див. Приклад 3.1.4), то xy є породжуючим для f многочленом. Отже за попередніми твердженнями ми отримуємо, що централізатор $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ многочлена f співпадає з $\Bbbk[xy]$ і $\Bbbk[xy]$ є максимальною абелевою підалгеброю у алгебрі Лі $P_2(\Bbbk)$.*

У попередніх твердженнях ми дали опис централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр алгебри $P_2(\Bbbk)$ у термінах замкнених многочленів. Тут ми наводимо спосіб перевірки замкненості многочлена від двох змінних і знаходження породжуючого для нього многочлена.

Твердження 4.1.7. *Нехай $f \in \Bbbk[x, y] \setminus \Bbbk$ довільний многочлен. Тоді f замкнений тоді і лише тоді, якщо для довільного відмінного від константи многочлена $h \in \Bbbk[x, y] \setminus \Bbbk$, для якого виконується умова $\deg h < \deg f$, має місце $[f, h] \neq 0$.*

Доведення. Нехай многочлен f замкнений. Розгляньмо довільний многочлен $h \in \Bbbk[x, y] \setminus \Bbbk$, такий що $[f, h] = 0$. Оскільки за Твердженням 4.1.4 централізатор замкненого многочлена f співпадає з $\Bbbk[f]$, то $h \in C_{P_2(\Bbbk)(f)} = \Bbbk[f]$. Отже $h = F(f)$ для деякого многочлена від однієї змінної $F(t) \in \Bbbk[t]$. Оскільки многочлен h відмінний від константи, маємо $\deg F(t) \geqslant 1$. Тому $\deg h \geqslant \deg f$, що доводить необхідну умову замкненості.

Нехай тепер многочлен f такий, що для довільного відмінного від константи многочлена h меншого степеня комутатор $[f, h]$ відмінний від нуля. Ми покажемо, що алгебра $\Bbbk[f]$ є максимальною однопородженою підалгеброю, що означатиме за Лемою 3.1.1, що многочлен f замкнений.

Нехай $f = F(h)$ для деяких многочленів $h \in \Bbbk[x, y]$ та $F(t) \in \Bbbk[t]$. Тоді $\deg h \leqslant \deg f$ і $[f, h] = [F(h), h] = F'(h)[h, h] = 0$, що, з огляду на наші припущення, можливо, лише якщо $\deg h = \deg f$. Отже $\deg F = 1$ і тому $\Bbbk[f] = \Bbbk[h]$, тобто $\Bbbk[f]$ дійсно максимальна однопороджена підалгебра в кільці многочленів $\Bbbk[x, y]$. □

Наведене твердження дозволяє перевіряти замкненість і знаходити породжуючий многочлен для заданого многочлена від двох змінних. Маємо наступний наслідок.

Наслідок 4.1.8. *Многочлен $f \in \Bbbk[x, y] \setminus \Bbbk$. є замкненим тоді і лише тоді, коли система лінійних рівнянь відносно $\alpha_{i,j}$*

$$\sum_{0<i+j<\deg f} \alpha_{i,j}[f, x^i y^j] = 0, \quad 0 < i + j < \deg f, \tag{4.1}$$

не має нетривіальних розв'язків. Еквівалентно, f є замкнений тоді і лише тоді, коли многочлени $[f, x^i y^j]$, $0 < i + j < \deg f$, є лінійно незалежними.

Більше того, нетривіальні розв'язки рівняння 4.1 найменшого степеня визначають породжуючий многочлен для f. Під степенем розв'язку $\alpha_{i,j}$ ми маємо на увазі степінь многочлена $\sum \alpha_{i,j} x^i y^j$.

Доведення. Довільний відмінний від константи многочлен $h \in \Bbbk[x, y]$ степеня $\deg h < \deg f$ можна записати у вигляді

$$h = \sum_{0<i+j<\deg f} \alpha_{i,j} x^i y^j, \quad \alpha_{i,j} \in \Bbbk.$$

Тоді

$$[f, h] = \sum_{0<i+j<\deg f} \alpha_{i,j} [f, x^i y^j].$$

Тому многочлен f за Твердженням 4.1.7 є замкненим тоді і лише тоді, коли система лінійних рівнянь відносно $\alpha_{i,j}$

$$\sum_{0<i+j<\deg f} \alpha_{i,j} [f, x^i y^j] = 0, \quad 0 < i + j < \deg f,$$

не має нетривіальних розв'язків. $\square$

Аналогічно до $P_2(\Bbbk)$(див. [48]) ми даємо тут опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$. Цей опис дається у термінах замкнених раціональних функцій, що визначаються аналогічно до замкнених многочленів.

Нагадаємо (див. розділ 3), що раціональна функція $f \in \Bbbk(x, y)$ називається замкненою, якщо має місце одна з наступних еквівалентних умов:

1) підполе $\Bbbk(f)$ є алгебраїчно замкненим у $\Bbbk(x, y)$;

2) підполе $\Bbbk(f)$ є максимальним елементом у множині

$$\mathcal{M} = \{\Bbbk(g) |\ g \in \Bbbk(x_1, \ldots, x_n) \setminus \Bbbk\},$$

тобто є максимальним однопородженим полем.

Як і у випадку алгебри $P_2(\Bbbk)$, алгебра $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$ має тривіальний центр, тобто її центр співпадає з полем $\Bbbk$.

Лема 4.1.9. *Центр $Z(\widetilde{P_2}(\Bbbk)(\Bbbk))$ алгебри Лі $\widetilde{P_2}(\Bbbk)(\Bbbk)$ співпадає з полем $\Bbbk$.*

Доведення. Цілком аналогічне до доведення Леми 4.1.3. □

Наступні твердження є аналогами Тверджень 4.1.4 та 4.1.5.

Твердження 4.1.10. *Для довільного елемента $g \in \widetilde{P_2}(\Bbbk) \setminus \Bbbk$ його централізатор $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(g)$ співпадає з $\Bbbk(f)$ для будь якої породжуючої раціональної функції f для g.*

Доведення. За Теоремою 2.0.10 $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(g) = \ker \mathrm{ad}(g) = \Bbbk(f)$ для деякої раціональної функції $f \in \Bbbk(x, y)$. Але за Лемою 2.0.8 ядро довільного диференціювання поля раціональних функцій $\Bbbk(x, y)$ є цілозамкненим в $\Bbbk(x, y)$. Тому f є замкненою раціональною функцією. □

Твердження 4.1.11. *Нехай A максимальна абелева підалгебра в алгебрі Лі $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$. Тоді $A = \Bbbk(f)$ для деякої замкненої раціональної функції $f \in \widetilde{P_2}(\Bbbk) \setminus \Bbbk$. Навпаки, для будь якої замкненої раціональної функції $f \in \widetilde{P_2}(\Bbbk) \setminus \Bbbk$ підалгебра $\Bbbk(f)$ є максимальною абелевою підалгеброю в $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$.*

Доведення. Нехай A максимальна абелева підалгебра Лі алгебри $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$, нехай g довільний відмінний від константи елемент з A. Очевидно,

$$A \subseteq C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(g) = \Bbbk(f)$$

для деякої замкненої функції f. Оскільки $\Bbbk(f)$ є абелевою підалгеброю, отримуємо $A = \Bbbk(f)$.

Нехай тепер f замкнена раціональна функція. Тоді $\Bbbk(f)$ очевидно абелева підалгебра. Залишається показати, що $\Bbbk(f)$ є максимальною абелевою підалгеброю в $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$.

Нехай g такий, що $[f, g] = 0$. Тоді

$$g \in C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}(f)} = \mathbb{k}(f).$$

Отже, елементи, що комутують з f належать $\mathbb{k}(f)$. Таким чином, $\mathbb{k}(f)$ максимальна абелева підалгебра в $\widetilde{P_2}(\mathbb{k})$. □

4.2 Власні простори в $P_2(\mathbb{k})$

В цьому підрозділі досліджується структура просторів власних векторів внутрішніх диференціювань алгебри $P_2(\mathbb{k})$. Ми розглядаємо власні вектори з узагальненими власними числами. які можуть бути многочленами, а не тільки елементами основного поля. Якщо обмежитися лише власними векторами з власними числами із поля $\mathbb{k}$, то можна описати ці простори більш детально (див. [60]).

Означення 4.2.1. *Нехай a і f многочлени з $P_2(\mathbb{k})$. Тоді через*

$$V_a(f) = \{g|\ \mathrm{ad}(f)(g) = ag\}.$$

позначимо простір власних функцій внутрішнього диференціювання $\mathrm{ad}(f)$*, що відповідають узагальненому власному значенню a. Еквівалентно, $V_a(f)$ є простором поліноміальних розв'язків диференціального рівняння $D(g) = ag$, $D = \mathrm{ad}(f)$.*

Приклад 4.2.1. *Розглянемо диференціювання* $\mathrm{ad}(xy)$*, тоді для довільного монома $x^n y^m \in P_2(\mathbb{k})$ маємо*

$$\mathrm{ad}(xy)(x^n y^m) = [xy, x^n y^m] = (m - n)x^n y^m.$$

Отже $V_{m-n}(xy) \neq 0$ для довільних цілих чисел m і n.

Звідси ми отримуємо також, що для довільного цілого числа d мономи $x^n y^{n+d}$, $n, n + d > 0$, будуть власними функціями многочлена xy, що відповідають власному числу d.

Нехай f довільна власна функція многочлена xy, що відповідає власному числу $\lambda \in \Bbbk$. Оскільки усі мономи в кільці поліномів від двох змінних є власними функціями xy, робимо висновок, що усі мономи многочлена f мають бути власними функціями xy з власним числом λ. Але із наведених вище міркувань випливає, що λ є цілим числом. Отже

$$f = \sum_i a_i x^i y^{i+\lambda}, \quad a_i \in \Bbbk,$$

де сума є скінченою. З іншого боку, зрозуміло, що усі многочлени такого виду є власними функціями xy з власним числом λ. Отже

$$V_\lambda(xy) = \left\{ \sum_i a_i x^i y^{i+\lambda} |\ a_i \in \Bbbk \right\}$$

Ми отримали опис скалярних власних чисел і відповідних ним власних просторів для многочлена xy.

Зауважмо, що $V_d(xy) = y^d \Bbbk[xy]$ у випадку, якщо d додатне ціле число, і $V_d(xy) = x^{-d} \Bbbk[xy]$, якщо d від'ємне ціле число.

Лема 4.2.2. *Нехай $f, g, h \in \Bbbk[x, y]$, $h \neq 0$, $\gcd(g, h) = 1$. Тоді $g/h \in C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f)$ тоді і лише тоді, коли g і h є власними значеннями $\operatorname{ad} f$, що відповідають тому самому узагальненому власному значенню (можливо нульовому).*

Доведення. Оскільки

$$[f, g/h] = ([f, g]h - [f, h]g)/h^2,$$

ми отримуємо, що $[f, g/h] = 0$ тоді і лише тоді, коли $[f, g]h = [f, h]g$. Оскільки g і h взаємнопрості, останнє виконується лише за умов $[f, g] = ag$ і $[f, h] = ah$ для деякого $a \in \Bbbk[x, y]$. □

Лема 4.2.3. *Нехай $a \neq 0$, f многочлени з $\Bbbk[x, y]$. Тоді*

1) Довільні два відмінних від нуля елементи з власного простору

$$V_a(f) = \{g \in \Bbbk[x, y] |\operatorname{ad}(f)(g) = ag\}$$

мають нетривіальний спільний дільник.

2) Нехай $g, h \in \mathbb{k}[x, y]$ *відмінні від нуля, і нехай* $gh \in V_a(f)$. *Тоді* $g \in V_a(f)$ *тоді і лише тоді, коли* $h \in C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$.

3) Нехай $g, h \in V_a(f)$ *і нехай* $d = \gcd(g, h)$. *Тоді* $d \in V_a(f)$.

Доведення. 1) Припустімо, що існують $g, h \in V_a(f)$ з $\gcd(g, h) = 1$. За Лемою 4.2.2 отримуємо $g/h \in C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f)$. Нехай $\bar{f}$ породжуючий многочлен для f. За Лемою 3.2.4 $\bar{f}$ є також породжуючим елементом для f в $\mathbb{k}(x, y)$. Отже, за Твердженням 4.1.10 $C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f) = \mathbb{k}(\bar{f})$ і ми отримуємо $g/h \in \mathbb{k}(\bar{f})$. Таким чином $g/h = G(\bar{f})/H(\bar{f})$ для $H, G \in \mathbb{k}[t]$, $\gcd(G, H) = 1$. Зауважимо, що з $\gcd(G(t), H(t)) = 1$ випливає $\gcd(G(\bar{f}), H(\bar{f})) = 1$. Тому, з точністю до множення на відмінну від нуля константу, $g = G(\bar{f})$ і $h = H(\bar{f})$. Отримуємо $g, h \in \mathbb{k}[\bar{f}] = C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$, що суперечить $a \neq 0$.

2) Випливає з

$$[f, g]h + [f, h]g = [f, gh] = agh,$$

бо g належить $V_a(f)$, тобто $[f, g] = ag$, тоді і лише тоді, коли $[f, h]g = 0$. Оскільки $g \neq 0$, останнє еквівалентно до $[f, h] = 0$, тобто до $h \in C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$.

3) Нехай $g = dg_1$, $h = dh_1$. Тоді за Лемою 4.2.2

$$[f, g_1/h_1] = [f, (dg_1)/(dh_1)] = [f, g/h] = 0.$$

Таким чином $g_1/h_1 \in C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f) = \mathbb{k}(\bar{f})$, звідки, використовуючи $\gcd(g_1, h_1) = 1$, отримуємо $g_1, h_1 \in \mathbb{k}[\bar{f}] = C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$. З 2) маємо $d \in V_a(f)$. □

Теорема 4.2.4. *Нехай* $a, f \in \mathbb{k}[x, y]$, $a \neq 0$, $V_a(f) \neq 0$. *Тоді існує* $g_{a,f} \in \mathbb{k}[x, y]$, *такий що* $V_a(f) = g_{a,f}\mathbb{k}[\bar{f}]$ *і* $g_{a,f}$ *не ділиться на елементи з* $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) = \mathbb{k}[\bar{f}]$. *Зокрема,* $V_a(f)$ *нескінченновимірний векторний простір над полем* $\mathbb{k}$ *і вільний модуль рангу* 1 *над централізатором* $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$ *многочлена* f.

Доведення. В якості $g_{a,f}$ візьмемо довільний відмінний від нуля елемент з $V_a(f)$ мінімального степеня. Тоді для довільного власного вектора $g \in V_a(f)$ за Лемою 4.2.3 маємо $\gcd(g_{a,f}, g) \in V_a(f)$. Оскільки $g_{a,f}$ ма мінімальний степінь, з точністю до множення на відмінну від нуля константу, маємо $\gcd(g_{a,f}, g) = g_{a,b}$. Тому $g_{a,f}$ ділить усі $g \in V_a(f)$. За Лемою 4.2.3 отримуємо

$$g_{a,f}\Bbbk[\bar{f}] \subseteq V_a(f) \subseteq g_{a,f}\Bbbk[\bar{f}],$$

отже $V_a(f) = g_{a,f}\Bbbk[\bar{f}]$. □

Зауваження 4.2.5. *Ця теорема говорить, що достатньо знайти лише один елемент з $V_a(f)$. Дійсно, якщо дано відмінний від нуля елемент $g \in V_a(f)$, можемо поділити g на усі множники з $C_{P_2(\Bbbk)}(f) = \Bbbk[\bar{f}]$. Таким чином отримаємо $g_{a,f}$.*

Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 4.2.6. *Переглянемо Приклад 4.2.1 і застосуємо твердження Теореми 4.2.4. Многочлен xy є замкненим (див. Приклад 3.1.4), тому маємо рівність $C_{P_2(\Bbbk)}(xy) = \Bbbk[xy]$.*

Розглянемо власну функцію $x^i y^{i+d}$ многочлена xy. Маємо, що $x^i y^{i+d} = (xy)^i y^d$, якщо d додатне, і $x^i y^{i+d} = (xy)^{i+d} x^{-d}$, якщо d від'ємне. Многочлени вигляду $(xy)^i$ належать до централізатора $C_{P_2(\Bbbk)}(xy)$. Очевидно, многочлени y^d і x^{-d} не діляться на многочлени з централізатора $C_{P_2(\Bbbk)}(xy) = \Bbbk[xy]$. Тому для додатних d маємо

$$V_d(xy) = y^d\Bbbk[xy],$$

для від'ємних d отримуємо

$$V_d(xy) = y^{-d}\Bbbk[xy],$$

що, зрозуміло, співпадає з результатами з Прикладу 4.2.1.

Як зазначалося у Розділі 2 на кільцях рядів від двох змінних є структура алгебри Пуассона, що задається як і в випадку многочленів чи раціональних функцій якобіаном

$$[f,g] := \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Оскільки за своїми властивостями ряди близькі до многочленів б природно було б сподіватися, що в для рядів теж мають місце результати подібні до результатів з попередніх підрозділів. Основою для доведення тверджень про централізатори та максимальні абелеві підалгебри в $P_n(\mathbb{k})$, $P_2(\mathbb{k})$ і $\widetilde{P_2}(\mathbb{k})$ є результати про структуру кілець констант диференціювань сформульовані у Теоремах 2.0.11, 2.0.9, 2.0.10. Аналогічні результати мають місце і для кілець формальних степеневих рядів від кількох змінних.

Розглянемо кільце формальних степеневих рядів від двох змінних.

Лема 4.2.7. *Центр $Z(\mathbb{k}[[x,y]])$ алгебри Лі $\mathbb{k}[[x,y]]$ співпадає з полем $\mathbb{k}$.*

Доведення. Ряд f міститься у центрі алгебри $\mathbb{k}[[x,y]]$ тоді і лише тоді, коли він комутує з твірними x та y, тобто коли

$$[f,x]=0, \quad [f,y]=0.$$

Оскільки $[f,x] = -\frac{\partial f}{\partial y}$ і $[f,y] = \frac{\partial f}{\partial x}$, отримуємо, що f міститься у центрі $\mathbb{k}[[x,y]]$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Оскільки характеристика поля $\mathbb{k}$ нуль, останнє рівносильне до $f \in \mathbb{k}$. $\square$

Нехай $F(t) \in \mathbb{k}[[t]]$ ряд від однієї змінної, тоді для довільного ряду $f \in \mathbb{k}[[x,y]]$ від двох змінних з нульовим вільним членом визначено композицію $F \circ f(x,y) = F(f)$. Таким чином $\mathbb{k}[[f]] = \{F(f) \mid F \in \mathbb{k}[[t]]\}$. Якщо ж вільний член $f(0)$ ряду f відмінний від нуля, визначмо

$$\mathbb{k}[[f]] := \mathbb{k}[[f - f(0)]].$$

Означення 4.2.2. *Ряд $f \in \mathbb{k}[[x,y]]$ називається максимальним, якщо алгебра $\mathbb{k}[[f]]$ є максимальним елементом у частково впорядкованій за включенням множині*

$$\{\mathbb{k}[[h]] \mid h \in \mathbb{k}[[x,y]]\}.$$

Зауваження 4.2.8. *Максимальні ряди є аналогами замкнених многочленів і раціональних функцій.*

Наступна лема дає подібно до Леми 3.1.5 широкий клас прикладів максимальних рядів.

Лема 4.2.9. *Нехай $f \in \Bbbk[[x,y]]$ ряд Якобі (тобто нехай, по аналогії з многочленами існує ряд g такий що $[f,g] \in \Bbbk^*$). Тоді формальний степеневий ряд f є максимальним.*

Доведення. Нехай g такий ряд, що $[f,g] = c \in \Bbbk^*$. Припустимо, що $f = H(h)$. Тоді

$$c = [f,g] = [H(h),g] = H'(h)[h,g],$$

звідки маємо $H'(h) \in \Bbbk[[x,y]]^*$, і тому $\Bbbk[[f]] = \Bbbk[[h]]$. □

Означення 4.2.3. *Нехай $f, h \in \Bbbk[[x,y]]$. Ряд h називається породжуючим рядом для ряду f, якщо h максимальний і $f \in \Bbbk[[h]]$.*

Лема 4.2.10. *Для довільного ряду $f \in \Bbbk[[x,y]]$ існує породжуючий ряд.*

Доведення. Оскільки із включення $\Bbbk[[f]] \subseteq \Bbbk[[g]]$ випливає $\operatorname{ord} f \geqslant \operatorname{ord} g$, робимо висновок, що існує максимальна однопороджена алгебра $\Bbbk[[h]]$, яка містить ряд f. □

Лема 4.2.11. *1) Нехай f максимальний ряд, тоді $C_{\Bbbk[[x,y]]}(f) = \Bbbk[[f]]$.*

2) Нехай $G(t) \in \Bbbk[[t]] \setminus \Bbbk$ і нехай $f = G(g)$, тоді $C_{\Bbbk[[x,y]]}(f) = C_{\Bbbk[[x,y]]}(g)$.

Доведення. 1) За Теоремою 2.0.12 маємо $C_{\Bbbk[[x,y]]}(f) = \Bbbk[[h]]$ для деякого ряду $h \in \Bbbk[[x,y]]$. Оскільки $\Bbbk[[f]] \subseteq C_{\Bbbk[[x,y]]}(f)$, з максимальності f випливає, що $\Bbbk[[f]] = \Bbbk[[h]] = C_{\Bbbk[[x,y]]}(f)$.

2) Випливає з $[f,h] = [G(g),h] = G'(g)[g,h]$ і $G'(g) \neq 0$, бо в такому випадку $[f,h] = 0$ тоді й лише тоді, коли $[g,h] = 0$. □

Твердження 4.2.12. *Нехай* $f \in \Bbbk[[x,y]] \setminus \Bbbk$. *Тоді* $C_{\Bbbk[[x,y]]}(f) = \Bbbk[[h]]$ *для довільного породжуючого для* f *ряду* h.

Доведення. Якщо h довільний породжуючий ряд для ряду f, то $C_{\Bbbk[[x,y]]}(f) = C_{\Bbbk[[x,y]]}(h) = \Bbbk[[h]]$ за Лемою 4.2.11. □

Зауваження 4.2.13. *Зокрема з останнього випливає, що для довільних двох породжуючих рядів* g *і* h *ряду* f *має місце рівність* $\Bbbk[[g]] = \Bbbk[[h]]$, *тобто породжуючий ряд визначений однозначно з точністю до автоморфізму кільця формальних рядів від однієї змінної: існує ряд* $F \in \Bbbk[[t]]$, $\operatorname{ord} F = 1$, *такий що* $g - g(0) = F(h - h(0))$.

Твердження 4.2.14. *Максимальними абелевими підалгебрами в* $\Bbbk[[x,y]]$ *є в точності однопороджені підалгебри* $\Bbbk[[h]]$, *породжені максимальним рядом* h.

Доведення. Нехай A максимальна абелева підалгебра в $\Bbbk[[x,y]]$. Розглянемо довільний відмінний від константи елемент з алгебри A. Тоді

$$A \subseteq C_{\Bbbk[[x,y]]}(h) = \Bbbk[[\bar{h}]],$$

де $\bar{h}$ породжуючий ряд для h. Оскільки $\Bbbk[[\bar{h}]]$ є абелевою підалгеброю, з максимальності A отримуємо $A = \Bbbk[[\bar{h}]]$.

Нехай тепер h максимальний ряд. Тоді $\Bbbk[[h]]$ абелева підалгебра. Нехай A максимальна абелева підалгебра, що містить $\Bbbk[[h]]$. Ми довели, що $A = \Bbbk[[g]]$ для деякого максимального ряду g. Оскільки h теж максимальний, маємо $\Bbbk[[h]] = \Bbbk[[g]] = A$. Отже $\Bbbk[[h]]$ максимальна абелева підалгебра в $\Bbbk[[x,y]]$. □

4.3 Алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$ в простій характеристиці

Якщо характеристика основного поля відмінна від нуля, маємо цілковито іншу структуру алгебр $P_2(\Bbbk)$ та $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$. Першою кардинальною відмінністю є те, що в простій характеристиці ці алгебри Пуассона мають нетривіальний центр.

Лема 4.3.1. *1) Центр $Z(P_2(\Bbbk))$ алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$ співпадає з $\Bbbk[x^p, y^p]$.*

2)Центр $Z(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ алгебри Лі $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$ співпадає з $\Bbbk(x^p, y^p)$.

Доведення. 1) Многочлен f міститься у центрі алгебри $P_2(\Bbbk)$ тоді і лише тоді, коли він комутує з твірними x та y, тобто коли

$$[f, x] = 0, \quad [f, y] = 0.$$

Оскільки $[f, x] = -\frac{\partial f}{\partial y}$ і $[f, y] = \frac{\partial f}{\partial x}$, отримуємо, що f міститься у центрі $P_2(\Bbbk)$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Легко бачити, що останнє виконується тоді і лише тоді, коли многочлен f міститься у $\Bbbk[x^p, y^p]$.

2) Нехай $f_1, f_2 \in \Bbbk[x, y]$, $f_2 \neq 0$. Зауважмо, що

$$[f_1/f_2, g_1/g_2] = (f_2 g_2)^{-p}[f_1 f_2^{p-1}, g_1 g_2^{p-1}],$$

бо для довільного многочлена f, його $p-$тий степінь міститься в $\Bbbk[x^p, y^p]$. Отже раціональна функція f_1/f_2 міститься у центрі $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$ лише тоді, коли многочлен $f_2^p(f_1/f_2)$ міститься у $Z(P_2(\Bbbk)) = \Bbbk[x^p, y^p]$. Тому, $Z(\widetilde{P_2}(\Bbbk)) = \Bbbk(x^p, y^p)$, що й доводить лему. □

Лема 4.3.2. $[af, bg] = ab[f, g]$ *для довільних $a, b \in \Bbbk(x^p, y^p)$ і довільних $f, g \in \widetilde{P_2}(\Bbbk)$, зокрема й для многочленів $a, b \in \Bbbk[x^p, y^p]$, $f, g \in P_2(\Bbbk)$.*

Доведення. Випливає з того, що $\Bbbk(x^p, y^p)$ міститься в центрі алгебри $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$. □

Лема 4.3.3. $\widetilde{P_2}(\Bbbk) = \Bbbk(x^p, y^p) \otimes P_2(\Bbbk)$.

Доведення. Очевидно $\Bbbk(x^p, y^p) \otimes P_2(\Bbbk)$ міститься у $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$. Нехай $f = f_1/f_2 \in \widetilde{P_2}(\Bbbk)$. Тоді $f_2^p f = f_1 f_2^{p-1} \in P_2(\Bbbk)$, і тому $f \in \Bbbk(x^p, y^p) \otimes P_2(\Bbbk)$. □

Лема 4.3.4. *Нехай* $f = f_1/f_2 \in \widetilde{P_2}(\Bbbk)$, $f_1, f_2 \in \Bbbk[x,y]$. *Тоді*

$$C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f) = \Bbbk(x^p, y^p) \otimes C_{P_2(\Bbbk)}(f_1 f_2^{p-1}).$$

Зокрема, якщо f *многочлен, то* $C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f) = \Bbbk(x^p, y^p) \otimes C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ *і* $C_{P_2(\Bbbk)}(f) = C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f) \cap \Bbbk[x,y]$.

Доведення. Нехай $g = g_1/g_2 \in C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f)$, $g_1, g_1 \in \Bbbk[x,y]$. Тоді маємо

$$0 = [g, f] = [g_1/g_2, f_1/f_2] = g_2^{-p} f_2^{-p} [g_1 g_2^{p-1}, f_1 f_2^{p-1}]$$

і отже $g_1 g_2^{p-1} \in C_{P_2(\Bbbk)}(f_1 f_2^{p-1})$. Тому, $g = g_2^{-p}(g_1 g_2^{p-1})$ міститься в $\Bbbk(x^p, y^p) \otimes C_{P_2(\Bbbk)}(f_1 f_2^{p-1})$.

Нехай $a \in \Bbbk(x^p, y^p)$, $b \in C_{P_2(\Bbbk)}(f_1 f_2^{p-1})$. Тоді

$$[a \otimes b, f] = a[b, f] = a f_2^{-p} [b, f_1 f_2^{p-1}] = 0.$$

Оскільки елементи типу $a \otimes b$, $a \in \Bbbk(x^p, y^p)$, $b \in C_{P_2(\Bbbk)}(f_1 f_2^{p-1})$ породжують $\Bbbk(x^p, y^p) \otimes C_{P_2(\Bbbk)}(f_1 f_2^{p-1})$, маємо $\Bbbk(x^p, y^p) \otimes C_{P_2(\Bbbk)}(f_1 f_2^{p-1}) \subseteq C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f)$. □

Лема 4.3.5. *Існують розклади векторних підпросторів на прямі суми підпросторів:*

1) $P_2(\Bbbk) = \sum_{i,j=0}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p] x^i y^j$,

2) $\widetilde{P_2}(\Bbbk) = \sum_{i,j=0}^{p-1} \Bbbk(x^p, y^p) x^i y^j$.

Доведення. Перший розклад очевидний, існування ж другого розкладу випливає з Леми 4.3.3. □

Лема 4.3.6. *Нехай* $f \in \widetilde{P_2}(\Bbbk) \setminus \Bbbk(x^p, y^p)$. *Тоді* $C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f) = \Bbbk(x^p, y^p, f)$. *Зокрема, якщо* f *многочлен, то* $C_{P_2(\Bbbk)}(f) = \Bbbk(x^p, y^p, f) \cap \Bbbk[x,y]$.

Доведення. Оскільки $f \notin \Bbbk(x^p, y^p)$ і $f \in C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f)$, маємо включення

$$\Bbbk(x^p, y^p) \subsetneq \Bbbk(x^p, y^p, f) \subseteq C_{\widetilde{P_2(\Bbbk)}}(f) \subsetneq \Bbbk(x,y).$$

Оскільки $[\mathbb{k}(x,y):\mathbb{k}(x^p,y^p)]=p^2$, отримуємо $[C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f):\mathbb{k}(x^p,y^p)]=p$. Оскільки виконується також $[\mathbb{k}(x^p,y^p,f):\mathbb{k}(x^p,y^p)]=p$, маємо $C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f)=\mathbb{k}(x^p,y^p,f)$. Звідси випливає і твердження про многочлен. $\square$

Наслідок 4.3.7. *Нехай φ і ψ елементи з $\mathbb{k}(x,y)\backslash\mathbb{k}(x^p,y^p)$. Тоді $[\varphi,\psi]=0$ тоді і лише тоді, коли $\mathbb{k}(x^p,y^p,\varphi)=\mathbb{k}(x^p,y^p,\psi)$.*

Доведення. Якщо $[\varphi,\psi]=0$, то φ міститься у централізаторі $C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(\psi)$, що співпадає з $\mathbb{k}(x^p,y^p,\psi)$, а ψ міститься у централізаторі $C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(\varphi)=\mathbb{k}(x^p,y^p,\varphi)$. Отримуємо $\mathbb{k}(x^p,y^p,\varphi)\subseteq\mathbb{k}(x^p,y^p,\psi)\subseteq\mathbb{k}(x^p,y^p,\varphi)$ звідки випливає, що проміжні включення є рівностями.

Навпаки, якщо $\mathbb{k}(x^p,y^p,\varphi)=\mathbb{k}(x^p,y^p,\psi)$, то, очевидно, $[\varphi,\psi]=0$. Це доводить необхідне твердження. $\square$

Маємо наступне уточнення Теореми 2.0.13.

Теорема 4.3.8. *Нехай $f\in\mathbb{k}[x,y]\backslash\mathbb{k}[x^p,y^p]$. Тоді $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)=\mathbb{k}[x^p,y^p,h_1,\dots h_{p-1}]$ є вільним модулем рангу p над $\mathbb{k}[x^p,y^p]$, де h_i є вільними твірними, що мають вигляд*

$$g^{-1}(a_0+a_2f+\dots+a_{p-1}f^{p-1}),$$

$g,a_i\in\mathbb{k}[x^p,y^p]$, $i=\overline{0,p-1}$.

Доведення. За Теоремою 2.0.13 $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$ є вільним $\mathbb{k}[x^p,y^p]$-модулем. Нехай r ранг $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$, тобто $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)\cong\mathbb{k}[x^p,y^p]^r$. Тоді маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{k}(x^p,y^p,f)=&C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f)=\mathbb{k}(x^p,y^p)\otimes C_{P_2(\mathbb{k})}(f)\cong\\&\mathbb{k}(x^p,y^p)\otimes(\mathbb{k}[x^p,y^p])^r\cong\mathbb{k}(x^p,y^p)^r.\end{aligned}$$

Оскільки $[\mathbb{k}(x^p,y^p,f):\mathbb{k}(x^p,y^p)]=p$, маємо $r=p$. Нехай $1,h_1,\dots,h_{p-1}$ твірні $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$, тобто $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)=\mathbb{k}[x^p,y^p,h_1,\dots,h_{p-1}]$. Оскільки за Лемою 4.3.6 $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)=C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f)\cap\mathbb{k}[x,y]$, отримуємо $h_j=b_{0j}+b_{1j}f+\dots+b_{p-1j}f^{p-1}$,

$b_{ij} \in \Bbbk(x^p, y^p)$. Позначаючи для фіксованого j за допомогою g_j добуток усіх знаменників в b_{ij}, одержимо $g_j h_i = a_{0j} + a_{1j} f + \cdots + a_{p-1j} f^{p-1}$, або еквівалентно $h_j = g_j^{-1}(a_{0j} + a_{1j} f + \cdots + a_{p-1j} f^{p-1})$, $a_{ij} \in \Bbbk[x^p, y^p]$. □

Теорема 4.3.9. *1) Нехай A максимальна абелева підалгебра в алгебрі Лі $P_2(\Bbbk)$. Тоді A збігається з централізатором $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ для деякого $f \in A \setminus \Bbbk[x^p, y^p]$. Навпаки, для довільного $f \in P_2(\Bbbk) \setminus \Bbbk[x^p, y^p]$ підалгебра $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ є максимальною абелевою підалгеброю із $P_2(\Bbbk)$.*

2) Усіма максимальними абелевими підалгебрами алгебри Лі $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$ є в точності підполя $\Bbbk(x^p, y^p, f)$, $f \in \widetilde{P_2}(\Bbbk) \setminus \Bbbk(x^p, y^p)$.

Доведення. 1) Нехай A - максимальна абелева підалгебра алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$. Очевидно, $A \supseteq \Bbbk[x^p, y^p]$. Візьмемо довільний елемент $f \in A \setminus \Bbbk[x^p, y^p]$ (він, очевидно, існує). Тоді $A \subseteq C_{P_2(\Bbbk)}(f)$. З Теореми 4.3.8 випливає, що підалгебра $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ абелева. Оскільки A максимальна абелева, то звідси отримаємо, що $A = C_{P_2(\Bbbk)}(f)$. Далі, для довільного $f \in P_2(\Bbbk) \setminus \Bbbk[x^p, y^p]$ підалгебра $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ абелева за відзначеним вище. Крім того, довільний елемент, що комутує з f міститься у $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$. Отже $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ – максимальна абелева підалгебра.

2) Нехай A максимальна абелева підалгебра у rP. Тоді A строго містить у собі $\Bbbk(x^p, y^p)$ і сама міститься у централізаторі довільного елемента $f \in A \setminus \Bbbk(x^p, y^p)$. За Лемою 4.3.6 централізатори елементів $f \in \widetilde{P_2}(\Bbbk) \setminus \Bbbk(x^p, y^p)$ мають вигляд $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f) = \Bbbk(x^p, y^p, f)$ і є абелевими підалгебрами. Отже з максимальності A випливає, що A співпадає з централізатором $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f) = \Bbbk(x^p, y^p, f)$ довільного елемента $f \in A \setminus \Bbbk(x^p, y^p)$. Навпаки, для довільного $f \in \widetilde{P_2}(\Bbbk) \setminus \Bbbk(x^p, y^p)$ підалгебра $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f) = \Bbbk(x^p, y^p, f)$ є абелевою, і довільний елемент, що комутує з f, міститься у цій алгебрі. Отже підалгебри $\Bbbk(x^p, y^p, f)$ є максимальними абелевими підалгебрами у $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$. □

Наслідок 4.3.10. *1) Нехай $\Bbbk$ поле характеристики 2, нехай f многочлен з $P_2(k) \setminus \Bbbk[x^2, y^2]$. Тоді $C_{P_2}(\Bbbk)(f) = \Bbbk[x^2, y^2, \bar{f}]$, де $\bar{f}$ отримується з f відніманням* *усіх мономів із* $\mathbb{k}[x^2, y^2]$ *і діленням на усі нетривіальні дільники із* $\mathbb{k}[x^2, y^2]$.

2) Максимальними абелевими підалгебрами в $P_2(\mathbb{k})$ *є в точності* $\mathbb{k}[x^2, y^2, h]$, *де* h *многочлен, що не містить мономів із* $\mathbb{k}[x^2, y^2]$ *і не має нетривіальних дільників у* $\mathbb{k}[x^2, y^2]$.

Доведення. Оскільки 2) випливає з 1) та з Теореми 4.3.9, достатньо довести 1). Нехай $f = a\bar{f} + b$, де $a, b \in \mathbb{k}[x^2, y^2]$, $a \neq 0$. Оскільки

$$0 = [f, f] = [f, a\bar{f} + b] = a[f, \bar{f}],$$

маємо $[f, \bar{f}] = 0$. Тому $\mathbb{k}[x^2, y^2, \bar{f}] \subseteq C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$. Із Proposition 4.2 з [43] $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) = \mathbb{k}[x^2, y^2, g]$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{k}[x, y]$. Маємо $\bar{f} \in \mathbb{k}[x^2, y^2, g]$ і тому

$$\bar{f} = F(x^2, y^2)g + G(x^2, y^2).$$

Але із побудови многочлена $\bar{f}$ випливає $G(x^2, y^2) = 0$ і $F(x^2, y^2) \in \mathbb{k}^*$. Отже, $\bar{f} = \alpha g$ для $\alpha \in \mathbb{k}^*$ і

$$\mathbb{k}[x^2, y^2, \bar{f}] = \mathbb{k}[x^2, y^2, g] = C_{P_2(\mathbb{k})}(f).$$

□

Приклад 4.3.11. *Якщо* $\operatorname{char} \mathbb{k} = 2$, *то*

1) $C_{P_2(\mathbb{k})}(xy) = \mathbb{k}[x^2, y^2, xy]$,

2) $C_{P_2(\mathbb{k})}(x^3y^7 + y^5 + 1) = \mathbb{k}[x^2, y^2, x^3y^3 + y]$.

У випадку нульової характеристики ми довели, що для многочлена $f \in P_2(\mathbb{k})$ його узагальнені власні простори, що відмінні від нуля, є вільними модулями рангу 1 над централізатором $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$ многочлена f. У випадку ж простої характеристики подібне твердження невірне. Дійсно, розгляньмо поле характеристики 2 та многочлен $f = xy$ і його власний простір, що відповідає власному значенню 1. У цьому випадку $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) = \mathbb{k}[x^2, y^2, xy]$ (див. Приклад 4.3.11).

Міркування, аналогічні до міркувань з Прикладу 4.2.1, показують, що власний простір $V_1(xy)$ є лінійною оболонкою мономів

$$\{x^i y^{i+2l+1}\}_{i,l\geqslant 0} \text{ та } \{x^{j+2k+1} y^j\}_{j,k\geqslant 0}.$$

Зрозуміло, що $V_1(xy)$ не можна породити одним елементом над $\Bbbk[x^2, y^2, xy]$, бо в протилежному випадку многочлени x та y, що містяться у $V_1(xy)$, мали б спільний дільник. З іншого боку, оскільки мономи x та y є твірними $\Bbbk[x^2, y^2, xy]-$модуля $V_1(xy)$, ми отримуємо сюр'єктивний гомоморфізм модулів над кільцем $\Bbbk[x^2, y^2, xy]$:

$$(\Bbbk[x^2, y^2, xy])^2 \twoheadrightarrow V_1(xy), \quad (a, b) \mapsto ax + by.$$

Припустімо, що $V_1(xy)$ є вільним модулем над $C_{P_2(\Bbbk)}(f) = \Bbbk[x^2, y^2, xy]$. Отже маємо ізоморфізм $V_1(xy) \cong (\Bbbk[x^2, y^2, xy])^r$, де $r > 1$. Тоді, розглядаючи композицію

$$(\Bbbk[x^2, y^2, xy])^2 \twoheadrightarrow V_1(xy) \cong (\Bbbk[x^2, y^2, xy])^r \twoheadrightarrow (\Bbbk[x^2, y^2, xy])^2,$$

де остання стрілка є проекцією на довільні дві координати, отримуємо сюр'єктивний ендоморфізм скінченнопородженого модуля $(\Bbbk[x^2, y^2, xy])^2$, який має бути ізоморфізмом за теоремою Келі-Гамільтона. Отже, ізоморфізмом має бути кожен з компонованих гомоморфізмів, тому x та y мають бути вільними твірними модуля $V_1(xy)$. Але між ними є нетривіальне співвідношення

$$xy \cdot x - x^2 \cdot y = 0,$$

тому x та y не є вільними твірними модуля $V_1(xy)$. Таким чином власний простір $V_1(xy)$ не є вільним $C_{P_2(\Bbbk)}(xy)$ модулем.

Кільце формальних степеневих рядів $\Bbbk[[x, y]]$ від двох змінних над полем $\Bbbk$, разом з операцією взяття якобіану

$$[f, g] := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

як вже згадувалося раніше є Пуассоновою алгеброю.

Зауважимо, що кільце степеневих рядів від двох змінних у простій характеристиці p може бути зображене, як $\Bbbk[[x,y]] = \Bbbk[[x^p,y^p]] \otimes P_2(\Bbbk)$, тобто довільний ряд $f \in \Bbbk[[x,y]]$ можна зобразити у вигляді скінченної суми $f = \sum\limits_i g_i h_i$, де $g_i \in \Bbbk[[x^p,y^p]]$, $h_i \in P_2(\Bbbk)$. Звідси, а також з Леми 4.3.5 випливає існування розкладу $\Bbbk[[x,y]] = \sum_{i,j=0}^{p-1} \Bbbk[[x^p,y^p]] x^i y^j$

Висновки до розділу 4

Цей розділ присвячений дослідженню структури алгебр Лі типу $P_2(\Bbbk)$, тобто алгебр Лі многочленів, раціональних функцій та рядів від двох змінних із дужкою Лі, що визначається якобіаном $[f,g] = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$.

Основні результати цього розділу опубліковано в статтях [48], [28] та [30].

На початку розділу досліджуються алгебри Лі типу $P_2(\Bbbk)$ у характеристиці нуль. Зокрема, у Твердженні 4.1.4 доводиться, що централізатор многочлена від двох змінних f співпадає з однопородженою алгеброю $\Bbbk[h]$ для довільного породжуючого для f многочлена h. У Твердженні 4.1.5 показано, що централізатори елементів у алгебрі Лі $P_2(\Bbbk)$ є в точності усіма її максимальними абелевими підалгебрами.

Теорема 4.2.4 дає опис структури узагальнених власних просторів внутрішніх диференціювань кільця многочленів від двох змінних, тобто описує структуру просторів поліноміальних розв'язків g диференціальних рівнянь $D(g) = ag$, $D = \mathrm{ad}(f)$, $f, a \in \Bbbk[x,y]$. Доведено, що відмінні від нуля власні простори диференціювання $\mathrm{ad}(f)$, де f многочлен від двох змінних, є вільними модулями рангу 1 над централізатором $C_{P_2(\Bbbk)}(f)$ многочлена f.

У підрозділі 4.3 розглядається випадок простої характеристики основного поля $\Bbbk$. Однією з важливих відмінностей від випадку нульової характеристики є те, що алгебри типу $P_2(\Bbbk)$ у простій характеристиці мають нетривіальний центр. Так, центр алгебри $P_2(\mathbb{k})$ співпадає $\mathbb{k}[x^p, y^p]$. Більше того, $P_2(\mathbb{k})$ є вільним модулем рангу p^2 над центром $\mathbb{k}[x^p, y^p]$. Відзначимо, що питання побудови вільних твірних не розглядалося в дисертаційній роботі у випадку характеристики $p > 2$, і є дуже цікавим, оскільки наведені теореми існування дають небагато інформації про можливу побудову цих твірних (у випадку характеристики $p = 2$ метод побудови твірних не є складним і випливає з їх опису). Теорема 4.3.8 є уточненням відомого твердження про те, що централізатори многочленів $f \in \mathbb{k}[x, y] \setminus \mathbb{k}[x^p, y^p]$ є вільними $\mathbb{k}[x^p, y^p]-$модулями, у ній доведено, що централізатор $C_{P_2(\mathbb{k})}(f)$ є вільним $\mathbb{k}[x^p, y^p]-$модулем рангу p. Аналогічно до випадку характеристики нуль, множина максимальних абелевих підалгебр у алгебрах $P_2(\mathbb{k})$ та $\widetilde{P_2}(\mathbb{k})$ співпадає з множиною централізаторів елементів f, які не містяться у центрі (Теорема 4.3.9).

Розділ 5

Спеціальна афінна алгебра Лі $sa_2(\Bbbk)$

В цьому розділі вивчається алгебра Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних з нульовою дивергенцією. Основні питання, які розглядаються – це централізатори елементів та максимальні абелеві підалгебри цієї алгебри Лі. Основна ідея дослідження полягає в тому, щоб піднятися в більшу алгебру Лі $P_2(\Bbbk)$, знайти там всю необхідну інформацію, використовуючи результати попереднього розділу, а потім знову опуститися в алгебру Лі диференціювань. При цьому навіть в характеристиці 0 виникає багато проблем, а в додатній характеристиці в повному об'ємі ця програма взагалі не може бути виконана. Тому результати цього розділу дуже відрізняються за своєю повнотою опису – достатньо повний опис централізаторів елементів в характеристиці 0 і загальна характеризація в простій характеристиці. Основна причина тут - неможливість знайти потенціал для багатьох класів диференціювань в простій характеристиці.

5.1 Спеціальна афінна алгебра Лі $sa_2(\Bbbk)$ в характеристиці нуль

Нагадаємо, що довільне $\Bbbk-$диференціювання кільця многочленів $\Bbbk[x, y]$ цілком визначається своїми значеннями на x і y, тому довільне диференціювання

$\Bbbk-$алгебри $\Bbbk[x, y]$ має вигляд

$$D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$$

для деяких многочленів $P, Q \in \Bbbk[x, y]$. Ми розглядатимемо диференціювання із нульовою дивергенцією, тобто такі диференціювання $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$, для яких $\mathrm{div}(D) := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Диференціювання такого виду утворюють підалгебру Лі $sa_2(\Bbbk)$ у алгебрі Лі $\mathrm{Der}(\Bbbk[x, y])$ усіх диференціювань кільця многочленів від двох змінних.

Нагадаємо також наступну добре відому умову існування потенціалу.

Лема 5.1.1. *Нехай Q та P многочлени від двох змінних. Тоді система рівнянь*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -P \end{cases} \tag{5.1}$$

має розв'язки тоді і лише тоді, коли $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ (нагадаємо, що довільний розв'язок системи (5.1) *називається потенціалом для $1-$форми $Qdx - Pdy$).*

Доведення. Зрозуміло, що якщо розв'язок системи (5.1) існує, то $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0$.

Нехай тепер виконується умова $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Нехай $\tilde{Q}$ первісна для Q відносно змінної x, тобто многочлен, для якого виконується $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = Q$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + P\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{Q} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

що означає $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + P = b(y) \in \Bbbk[y]$. Нехай $a(y) \in \Bbbk[y]$ це первісна для $-b(y)$, тобто має місце $a'(y) = -b(y)$. Покладімо $\varphi = \tilde{Q} + a$. Тоді $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = Q$ та $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + a'(y) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} - b(y) = -P$. Лему доведено. □

В цьому підрозділі ми даємо опис централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в алгебрі $sa_2(\Bbbk)$. Ключовим для цього є наступне просте спостереження.

Лема 5.1.2. *Алгебра Лі $sa_2(\Bbbk)$ ізоморфна факторалгебрі алгебри $P_2(\Bbbk)$ за ідеалом $Z(P_2(\Bbbk)) = \Bbbk$.*

Доведення. Як вже згадувалося раніше довільний елемент $f(x, y) \in P_2(\Bbbk)$ визначає внутрішнє диференціювання $\operatorname{ad} f : P_2(\Bbbk) \to P_2(\Bbbk)$, $\operatorname{ad} f(g) = [f, g]$ алгебри Лі $P_2(\Bbbk)$. Лінійне відображення ad є гомомоморфізмом алгебр Лі

$$\operatorname{ad} : P_2(\Bbbk) \to \operatorname{Der}(\Bbbk[x, y]).$$

Ядром цього гомоморфізму Алгебр Лі є центр $Z(P_2(\Bbbk))$ алгебри $P_2(\Bbbk)$, що за Лемою 4.1.3 співпадає з полем $\Bbbk$, що розглядається як абелева підалгебра алгебри $P_2(\Bbbk)$. Розглянемо довільний многочлен $f \in P_2(\Bbbk)$. Із означення дужки Лі в алгебрі $P_2(\Bbbk)$

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

випливає, що

$$\operatorname{ad} f = -\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Отже дивергенція внутрішнього диференціювання $\operatorname{ad} f$ дорівнює

$$\operatorname{div}(\operatorname{ad} f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Тому $\operatorname{ad} f \in sa_2(\Bbbk)$, отже образ відображення ad міститься в $sa_2(\Bbbk)$: $\operatorname{ad}(P_2(\Bbbk)) \subseteq sa_2(\Bbbk)$.

Покажемо, що образ ad насправді співпадає з $sa_2(\Bbbk)$. Нехай $D = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ довільний елемент алгебри $sa_2(\Bbbk)$, тобто $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. За Лемою 5.1.1 ця умова забезпечує існування многочлена $\varphi(x, y)$ (потенціалу) такого, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -P(x, y).$$

Для φ ми отримуємо

$$[\varphi, x] = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = P(x, y), \quad [\varphi, y] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q(x, y),$$

іншими словами $\mathrm{ad}(\varphi) = D$, що доводить сюр'єктивність відображення $\mathrm{ad} : P_2(\Bbbk) \to sa_2(\Bbbk)$. Оскільки, як було зазначено вище, $\ker \mathrm{ad} = Z(P_2(\Bbbk)) = \Bbbk$, отримуємо $P_2(\Bbbk)/\Bbbk \simeq sa_2(\Bbbk)$. Лему доведено. $\square$

В наступній теоремі дано опис централізаторів елементів в алгебрі $sa_2(\Bbbk)$.

Теорема 5.1.3. *Нехай $D = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ відмінний від нуля елемент алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$. Нехай $f(x, y) \in \Bbbk[x, y]$ такий многочлен, що $\frac{\partial f}{\partial x} = Q(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -P(x, y)$ і нехай $\bar{f}$ породжуючий многочлен многочлена f. Тоді*

1) якщо $f(x, y)$ не многочлен Якобі, то

$$C_{sa_2(\Bbbk)}(D) = \Bbbk[\bar{f}]\left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

2) якщо $f(x, y)$ многочлен Якобі і $g(x, y)$ такий многочлен, що $\det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$, то

$$C_{sa_2(\Bbbk)}(D) = \Bbbk[f]\,\mathrm{ad}\, f + \Bbbk\,\mathrm{ad}\, g = \Bbbk[f]D + \Bbbk\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Доведення. За Твердженням 4.1.4 $C_{P_2(\Bbbk)}(f) = \Bbbk[\bar{f}]$. Гомоморфізм $\mathrm{ad} : P_2(\Bbbk) \to sa_2(\Bbbk)$ відображає многочлен $\bar{f}$ у диференціювання $\mathrm{ad}\,\bar{f} = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ а многочлен f у диференціювання D. Нехай

$$D_1 = P_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

це довільний відмінний від нуля елемент, що належить до централізатора $C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$ диференціювання D. За Лемою 5.1.2 існує многочлен $f_1(x, y)$, такий що $\mathrm{ad}\, f_1 = D_1$. Оскільки D_1 комутує з диференціюванням D, маємо

$$0 = [D, D_1] = [\mathrm{ad}\, f, \mathrm{ad}\, f_1] = \mathrm{ad}[f, f_1],$$

звідки випливає, що $[f, f_1]$ міститься у ядрі гомоморфізму ad, тобто у центрі $Z(P_2(\Bbbk)) = \Bbbk$ алгебри $P_2(\Bbbk)$, що співпадає з полем $\Bbbk$.

1) Якщо f не є многочленом Якобі, то тоді $[f, f_1] = 0$. Тому многочлен f_1 належить до централізатора $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) = \mathbb{k}[\bar{f}]$ многочлену f. Ми показали таким чином, що прообраз централізатора D відносно гомоморфізму $\mathrm{ad} : P_2(\mathbb{k}) \to sa_2(\mathbb{k})$ співпадає з централізатором многочлена f:

$$\mathrm{ad}^{-1}(C_{sa_2(\mathbb{k})}(D)) = C_{P_2(\mathbb{k})}(f) = \mathbb{k}[\bar{f}].$$

Використовуючи сюр'єктивність гомоморфізму ad отримуємо

$$C_{sa_2(\mathbb{k})}(D) = \mathrm{ad}(\mathbb{k}[\bar{f}]) = \mathbb{k}[\bar{f}] \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \right),$$

що й доводить першу частину теореми.

2) Нехай тепер f многочлен Якобі, тобто існує многочлен g, такий що $[f, g] = \det(J(f, g)) = c \in \mathbb{k}^*$. Зауважимо, що за Лемою 3.1.5 многочлени Якобі є замкненими многочленами, тому ми можемо припустити, що $\bar{f} = f$. Оскільки $[\mathrm{ad}\, f, \mathrm{ad}\, g] = \mathrm{ad}[f, g] = \mathrm{ad}\, c = 0$, отримуємо $\mathrm{ad}\, g \in C_{sa_2(\mathbb{k})}(\mathrm{ad}\, f) = C_{sa_2(\mathbb{k})}(D)$. Покажемо, що

$$\mathrm{ad}^{-1}(C_{sa_2(\mathbb{k})}(D)) = \{h \in P_2(\mathbb{k}) |\ [f, h] \in \mathbb{k}\} = \mathbb{k}[f] + \mathbb{k}g.$$

Дійсно, нехай многочлен h міститься в прообразі централізатора диференціювання D. Це означає, що $[D, \mathrm{ad}\, h] = 0$. Тоді з рівностей

$$[D, \mathrm{ad}\, h = [\mathrm{ad}\, f, \mathrm{ad}\, h] = \mathrm{ad}[f, h]$$

випливає, що $[f, h]$ міститься в ядрі ad, тобто належить полю $\mathbb{k}$. Нехай $[f, h] = \alpha \in \mathbb{k}$. Використовуючи $[f, g] = c \neq 0$, отримуємо $[f, h] = \alpha c^{-1} c = \alpha c^{-1}[f, g]$, тобто

$$[f, h - \alpha c^{-1} g] = 0.$$

Таким чином $h - \alpha c^{-1} g$ міститься у централізаторі многочлена f, і h міститься у $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) + \mathbb{k}g$. З іншого боку, для довільного многочлена h із $C_{P_2(\mathbb{k})}(f) + \mathbb{k}g$, обертаючи імплікації у попередньому міркуванні, отримуємо $[\mathrm{ad}\, h, D] = 0$. Ми довели, що прообраз централізатора D співпадає із $C_{P_2(\Bbbk)}(f)+\Bbbk g$. Але, оскільки, як було згадано вище, з того, що f є многочленом Якобі, випливає $\bar{f}=f$, за Твердженням 4.1.4 маємо $C_{P_2(\Bbbk)}(f)=\Bbbk[f]$, отже дійсно

$$\mathrm{ad}^{-1}(C_{sa_2(\Bbbk)}(D))=\Bbbk[f]+\Bbbk g.$$

Тому, знову користуючись сюр'єктивністю гомоморфізму

$$\mathrm{ad}: P_2(\Bbbk)\to sa_2(\Bbbk),$$

отримуємо

$$C_{sa_2(\Bbbk)}(D)=\mathrm{ad}(\mathrm{ad}^{-1}(C_{sa_2(\Bbbk)}(D)))=\mathrm{ad}(\Bbbk[f]+\Bbbk g)=$$
$$=\Bbbk[f]\,\mathrm{ad}\,f+\Bbbk\,\mathrm{ad}\,g=\Bbbk[f]D+\Bbbk\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

що й доводить теорему. □

Зауваження 5.1.4. *З Наслідку 3.1.11 випливає, що у випадку алгебраїчно замкненого поля многочлен $\bar{f}$ у Теоремі 5.1.3 можна обрати незвідним.*

Зауваження 5.1.5. *З опису централізаторів, наведеного в Теоремі 5.1.3 випливає, що централізатор диференціювання, що відповідає неякобієвому многочлену, є абелевою підалгеброю, а централізатор диференціювання, що відповідає многочлену Якобі, є розв'язною алгеброю ступеня розв'язності* 2.

Доведення. Дійсно, у першому випадку, коли многочлен f не є многочленом Якобі, централізатор $C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$ є образом абелевої підалгебри $C_{P_2(\Bbbk)}(f)=\Bbbk[\bar{f}]$. У випадку ж многочлена Якобі централізатор є образом алгебри $\Bbbk[f]+\Bbbk g$. Із рівності

$$[\Phi(f)+\alpha g,\Psi(f)+\beta g]=\Phi'(f)[f,g]+\Psi'(f)[g,f]=(\Phi'(f)-\Psi'(f))c,$$

де $[f,g]=c\in\Bbbk^*$, випливає, що $[\Bbbk[f]+\Bbbk g,\Bbbk[f]+\Bbbk g]\subseteq\Bbbk[f]$, отже алгебра $\Bbbk[f]+\Bbbk g$ є розв'язною алгеброю довжини 2. При переході до гомоморфного образу під дією ad ступінь розв'язності цієї алгебри Лі залишається, як неважко переконатися, рівною 2. $\square$

Приклад 5.1.6. *Розглянемо диференціювання з нульовою дивергенцією*

$$D = -(2x^2y + x)\frac{\partial}{\partial x} + (2xy^2 + y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Це диференціювання є образом многочлена $f = x^2y^2 + xy$ під дією гомоморфізму ad. Дійсно, $-\frac{\partial f}{\partial y} = -(2x^2y + x)$ і $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + y$, тому $\mathrm{ad}(f) = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = D$. Многочлен xy є породжуючим для f (див. Приклад 4.1.6). Крім того xy не є многочленом Якобі (див. Приклад 3.1.7). Тому за Теоремою 5.1.3 централізатор диференціювання D співпадає з

$$\mathbb{k}[xy]\,\mathrm{ad}(xy) = \mathbb{k}[xy]\left(-x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Приклад 5.1.7. *Розглянемо диференціювання з нульовою дивергенцією*

$$D = -2y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Для многочлена $f = x + y^2$ маємо $\mathrm{ad}\, f = D$, причому многочлен f є многочленом Якобі: для $g = y$ виконується $[f, g] = 1$. Тому за Теоремою 5.1.3, враховуючи, що $\mathrm{ad}\, y = -\frac{\partial}{\partial x}$, централізатор диференціювання D співпадає з

$$\mathbb{k}[x + y^2]D + \mathbb{k}(-\frac{\partial}{\partial x}) = \mathbb{k}[x + y^2]D + \mathbb{k}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Як бачимо у доведенні Теореми 5.1.3, підалгебри в $P_2(\mathbb{k})$ типу

$$\mathbb{k}[f] + \mathbb{k}g, \quad [f, g] \in \mathbb{k}^*$$

виникають природним чином при спробах дослідити питання про комутування двох диференціювань з нульовою дивергенцією кільця многочленів $\mathbb{k}[x, y]$. Нам знадобляться деякі властивості таких підалгебр.

Лема 5.1.8. *Нехай* $L = \Bbbk[f] + \Bbbk g$ *підалгебра алгебри Лі* $P_2(\Bbbk)$ *з* $\det(J(f, g)) = c \in \Bbbk^*$. *Якщо* A *нільпотентна підалгебра алгебри* L *класу нільпотентності щонайбільше* 2, *тоді або* $A \subseteq \Bbbk[f]$, *або* A *міститься у підалгебрі виду* $\Bbbk + \Bbbk f + \Bbbk(g + p(f))$ *для деякого многочлена* $p(t) \in \Bbbk[t]$.

Доведення. Припустимо, що A не міститься у $\Bbbk[f]$. Оскільки розмірність векторного простору $L/\Bbbk[f]$ дорівнює 1, то $\Bbbk-$підпростір $A \cap \Bbbk[f]$ має корозмірність 1 у A. Тому $A = (A \cap \Bbbk[f]) + \Bbbk(g + p(f))$ для деякого многочлена $p(t) \in \Bbbk[t]$. З огляду на те, що для довільного многочлена $q(t) \in \Bbbk[t]$ має місце

$$[q(f), g + p(f)] = q'(f)[f, g] = q'(f) \cdot c,$$

і оскільки клас нільпотентності A не перевищує 2 за умовою леми, отримуємо, що

$$[q'(f), g] = q''(f)[f, g] = q''(f)c = 0,$$

отже підпростір $A \cap \Bbbk[f]$ не може містити многочленів степеня > 1. Тому перетин $A \cap \Bbbk[f]$ міститься в підалгебрі $\Bbbk + \Bbbk f$, і тому $A \subseteq \Bbbk + \Bbbk f + \Bbbk(g + p(f))$, що й потрібно було довести. $\square$

Теорема 5.1.9. *Нехай* A *максимальна абелева підалгебра алгебри Лі* $sa_2(\Bbbk)$. *Тоді*

1) якщо $\dim A = \infty$, *то*

$$A = \Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

де $f(x, y)$ *замкнений многочлен.*

Навпаки, для довільного замкненого многочлена f, *алгебра*

$$\Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

є максимальною абелевою підалгеброю в $sa_2(\Bbbk)$;

2) якщо $\dim A < \infty$ *то*

$$A = \Bbbk D_1 + \Bbbk D_2,$$

де $D_1 = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$, *і* $D_2 = -\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ *для деякої пари многочленів* f *та* g, *таких що* $[f, g] = \det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$.

Навпаки, для довільних многочленів f, g *з умовою* $\det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$ *підалгебра*

$$\Bbbk D_1 + \Bbbk D_2,$$

де D_1 *і* D_2 *визначені як і вище, є максимальною абелевою підалгеброю в* $sa_2(\Bbbk)$.

Доведення. Нехай D довільний відмінний від нуля елемент алгебри Лі A. Тоді $A \subseteq C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$ і очевидно A є максимальною абелевою підалгеброю у $C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$. За Теоремою 5.1.3 або

$$C_{sa_2(\Bbbk)}(D) = \Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

або

$$C_{sa_2(\Bbbk)}(D) = \Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \Bbbk\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

У першому випадку f є замкненим многочленом, у другому ж випадку многочлени f і g задовольняють умову $[f, g] \in \Bbbk^*$. У першому випадку $C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$ є абелевою підалгеброю. Тому, $A = C_{sa_2(\Bbbk)}(D) = \Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Розглянемо другий випадок. Позначимо $L = \mathrm{ad}^{-1}(C_{sa_2(\Bbbk)}(D))$ прообраз централізатора елемента D відносно відображення $\mathrm{ad} : P_2(\Bbbk) \to sa_2(\Bbbk)$. Тоді підалгебра $\mathrm{ad}^{-1}(A)$ в $P_2(\Bbbk)$ є також підалгеброю алгебри L. Легко бачити, що $L = \Bbbk[f] + \Bbbk g$. Оскільки $\ker \mathrm{ad} = Z(P_2(\Bbbk)) = \Bbbk$, маємо, що $\mathrm{ad}^{-1}(A)$ нільпотентна підалгебра у алгебрі L класу нільпотентності $\leqslant 2$. За Лемою 5.1.8 має місце або $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \Bbbk[f]$, або $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \Bbbk + \Bbbk f + \Bbbk(g + p(f))$ для деякого многочлена від однієї змінної $p(t) \in \Bbbk[t]$.

З включення $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \Bbbk[f]$ випливає $A \subseteq \mathrm{ad}(\Bbbk[f])$. Оскільки алгебра $\mathrm{ad}(\Bbbk[f])$ абелева і A є максимальною абелевою підалгеброю в алгебрі $sa_2(\Bbbk)$, отримуємо, що $A = \Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Нехай тепер $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \Bbbk + \Bbbk f + \Bbbk(g + p(f))$. Застосовуючи відображення ad, отримуємо включення

$$A \subseteq \mathrm{ad}(\Bbbk + \Bbbk f + \Bbbk(g + p(f))) = \Bbbk D_1 + \Bbbk D_2,$$

де $D_1 = \mathrm{ad}\, f$ і $D_2 = \mathrm{ad}(g + p(f))$. Підалгебра $\Bbbk D_1 + \Bbbk D_2$ є абелевою і тому, оскільки A максимальна абелева підалгебра, $A = \Bbbk D_1 + \Bbbk D_2$. Перепозначаючи $g + p(f)$ за допомогою g, маємо $D_1 = \mathrm{ad}\, f, D_2 = \mathrm{ad}\, g$. Ми довели необхідність умов з обох частин теореми.

Нехай f замкнений многочлен. Ми покажемо, що $\Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ є максимальною абелевою підалгеброю в $sa_2(\Bbbk)$. Зрозуміло, що, оскільки f замкнений, за Твердженням 4.1.5 $\Bbbk[f]$ є максимальною абелевою підалгеброю в $P_2(\Bbbk)$. Очевидно, що

$$\mathrm{ad}(\Bbbk[f]) = \Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

абелева підалгебра в $sa_2(\Bbbk)$. Припустімо, що $\mathrm{ad}(\Bbbk[f])$ не є максимальною абелевою підалгеброю. Тоді вона є власною підалгеброю у деякій максимальній абелевій підалгебрі B алгебри $sa_2(\Bbbk)$. Оскільки $\dim B = \infty$, як було показано вище, існує замкнений многочлен g, такий що

$$B = \Bbbk[g]\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Звідси легко отримується, що $\Bbbk[f]$ є власною підалгеброю у $\mathrm{ad}^{-1}(B) = \Bbbk[g]$. Це неможливо за Лемою 3.1.1, оскільки $\Bbbk[f]$ максимальна підалгебра у множині підалгебр алгебри $P_2(\Bbbk)$ вигляду $\Bbbk[h]$. Це доводить, що $\Bbbk[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ максимальна абелева підалгебра у $sa_2(\Bbbk)$.

Нехай тепер f і g два многочлени із $\Bbbk[x, y]$, такі що $[f, g] \in \Bbbk^*$. Тоді диференціювання $D_1 = \mathrm{ad}\, f$ і $D_2 = \mathrm{ad}\, g$ комутують. Отже $A = \Bbbk D_1 + \Bbbk D_2$ є абелевою двовимірною підалгеброю в $sa_2(\mathbb{k})$. Припустимо, що A не максимальна абелева підалгебра алгебри $sa_2(\mathbb{k})$. Тоді A міститься у деякій максимальній абелевій підалгебрі B алгебри $sa_2(\mathbb{k})$. Якщо $\dim B = \infty$, за доведеним вище,

$$B = \mathbb{k}[h]\left(-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

для деякого замкненого многочлена h. Тоді $\mathrm{ad}^{-1}(B) = \mathbb{k}[h]$ абелева підалгебра в $P_2(\mathbb{k})$, що містить неабелеву підалгебру $\mathbb{k} + \mathbb{k}f + \mathbb{k}g$. Це неможливо, і тому $\dim B < \infty$. Отже, за доведеним вище, $\dim B = 2$. Звідси випливає $A = B$, що суперечить нашому припущенню. Отримане протиріччя доводить, що A максимальна абелева підалгебра в $sa_2(\mathbb{k})$. Достатність умов з обох тверджень Теореми доведено. □

Якщо поле $\mathbb{k}$ алгебраїчно замкнене, то за Теоремою 3.1.10 замкнені многочлени можна замінити на незвідні. Отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 5.1.10. *Нехай поле $\mathbb{k}$ алгебраїчно замкнене, тоді*

1) нескінченновимірними максимальними абелевими підалгебрами в $sa_2(\mathbb{k})$ є в точності підалгебри виду

$$A = \mathbb{k}[f]\,\mathrm{ad}\, f = \mathbb{k}[f]\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

де $f(x,y)$ незвідний многочлен;

2) скінченновимірними максимальними абелевими підалгебрами у алгебрі Лі $sa_2(\mathbb{k})$ є в точності підалгебри виду

$$A = \mathbb{k}D_1 + \mathbb{k}D_2,$$

де $D_1 = \mathrm{ad}(f) = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$, $D_2 = \mathrm{ad}\, g = -\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ і многочлени f та g є незвідними та утворюють Якобієву пару, тобто $[f,g] = \det(J(f,g)) \in \mathbb{k}^*$.

Приклад 5.1.11. *Розглянемо Якобієву пару многочленів $f = x + y^2$, $g = y$ з Прикладу 5.1.7.*

Ці многочлени є замкненими як многочлени Якобі. Тоді алгебри

$$\mathbb{k}[f]\,\mathrm{ad}\,f = \mathbb{k}[x+y^2]\left(-2y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

та

$$\mathbb{k}[g]\,\mathrm{ad}\,g = \mathbb{k}[y]\frac{\partial}{\partial x}$$

є прикладами нескінченновимірних максимальних абелевих підалгебр у $sa_2(\mathbb{k})$, а алгебра

$$\mathbb{k}\left(-2y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) + \mathbb{k}\frac{\partial}{\partial x}$$

є прикладом скінченновимірної максимальної абелевої підалгебри у $sa_2(\mathbb{k})$.

Розглянемо підалгебру Лі L алгебри усіх диференціювань $\mathrm{Der}(\mathbb{k}[x,y])$ кільця многочленів від двох змінних, що складається з диференціювань зі сталою дивергенцією, тобто

$$L = \{D \in \mathrm{Der}(\mathbb{k}[x,y] \mid \mathrm{div}D \in \mathbb{k})\}.$$

Тоді L містить у собі $sa_2(\mathbb{k})$. Оскільки для довільного диференціювання $D \in \mathrm{Der}(\mathbb{k}[x,y])$ з $\mathrm{div}D = 1$ і для довільного $D_1 \in \mathrm{Der}(\mathbb{k}[x,y])$ з $\mathrm{div}D_1 = a \in \mathbb{k}$ має місце $\mathrm{div}(aD - D_1) = 0$, то $L = \mathbb{k}D + sa_2(\mathbb{k})$ для довільного диференціювання D з $\mathrm{div}D = 1$ (або для D з $\mathrm{div}D \in \mathbb{k}^*$). Тому $sa_2(\mathbb{k})$ є підалгеброю корозмірності 1 у L. Наступне твердження дає опис централізаторів елементів з $sa_2(\mathbb{k})$ у алгебрі L.

Твердження 5.1.12. *Нехай $D \in sa_2(\mathbb{k})$ і нехай L алгебра диференціювань кільця $\mathbb{k}[x,y]$ зі сталою дивергенцією. Якщо існує диференціювання $D_1 \in L \setminus sa_2(\mathbb{k})$, таке що $[D, D_1] = 0$, тоді*

$$C_L(D) = \mathbb{k}D_1 + C_{sa_2(\mathbb{k})}(D).$$

В іншому ж випадку

$$C_L(D) = C_{sa_2(\mathbb{k})}(D).$$

Доведення. Припустимо, що існує диференціювання $D_1 \in L$, $\mathrm{div} D_1 \neq 0$, таке що $[D, D_1] = 0$. Оскільки елементи з L мають загальний вигляд $aD_1 + D_2$, де $a \in \Bbbk$ і $D_2 \in sa_2(\Bbbk)$, ми отримуємо, що $[D, aD_1 + D_2] = 0$ тоді і лише тоді, коли $[D, D_2] = 0$, тобто тоді і лише тоді,коли $D_2 \in C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$. В цьому випадку $C_L(D) = \Bbbk D_1 + C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$.

Якщо ж елементів зі сталою відмінною від нуля дивергенцією, що комутують з D не існує, тоді $C_L(D) \subseteq C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$, а значить і $C_L(D) = C_{sa_2(\Bbbk)}(D)$. □

Лема 5.1.13. *Нехай $D = \mathrm{ad}\, f \in sa_2(\Bbbk)$, нехай $\lambda \in \Bbbk^*$. Нехай*

$$\begin{aligned} V_\lambda(D) =& \{D_1 \in sa_2(\Bbbk) |\ [D, D_1] = \lambda D_1\} \text{ та} \\ V_\lambda(f) =& \{g \in P_2(\Bbbk) |\ [f, g] = \lambda g\} \end{aligned}$$

власні простори, що відповідають власному числу λ у $sa_2(\Bbbk)$ та $P_2(\Bbbk)$ відповідно. Тоді $V_\lambda(D) = \mathrm{ad}(V_\lambda(f))$.

Доведення. Зауважимо, що включення $V_\lambda(D) \supseteq \mathrm{ad}(V_\lambda(f))$ є очевидним. Доведемо включення $V_\lambda(D) \subseteq \mathrm{ad}(V_\lambda(f))$. Дійсно, нехай $D_1 = \mathrm{ad}\, g \in sa_2(\Bbbk)$. Тоді $D_1 \in V_\lambda(D)$ за означенням тоді і лише тоді, коли $[D, D_1] = \lambda D_1$. Оскільки $D = \mathrm{ad}\, f$ і $D_1 = \mathrm{ad}\, g$, останнє є еквівалентним до $[\mathrm{ad}\, f, \mathrm{ad}\, g] = \lambda\, \mathrm{ad}\, g$ або $\mathrm{ad}([f, g]) = \mathrm{ad}(\lambda g)$. Зрештою, використовуючи, що $\ker \mathrm{ad} = \Bbbk$, маємо умову належності D_1 до власного простору $V_\lambda(D)$:

$$[f, g] = \lambda g + \mu, \quad \mu \in \Bbbk.$$

Але, оскільки $\lambda \neq 0$, останнє записується як $[f, g + \lambda^{-1}\mu] = [f, g] = \lambda g + \mu = \lambda(g + \lambda^{-1}\mu)$. Отже D_1 міститься у $V_\lambda(D)$ тоді і лише тоді, коли $g + \lambda^{-1}\mu$ належить простору $V_\lambda(f)$ для деяких $\lambda, \mu \in \Bbbk$. Оскільки $D_1 = \mathrm{ad}\, g = \mathrm{ad}(g + \lambda^{-1}\mu)$, отримуємо необхідне твердження. □

Лема 5.1.13 разом з Теоремою 4.2.4 може бути застосована до обчислення власних просторів диференціювань $V_\lambda(D)$, $D \in sa_2(\Bbbk)$, $\lambda \in \Bbbk^*$.

Зауважимо, що в загальному випадку задача знаходження підпросторів узагальнених власних векторів для диференціювань алгебри Лі $P_2(\mathbb{k})$ є дуже важкою: в роботі Ю.Стейна [60] сформульовано проблему опису многочленів $f(x, y)$ над полем характеристики 0, для яких існують многочлени $g(x, y)$ такі, що $[f, g] = g$. Зауважимо, що це фактично означає, що потрібно описати неабелеві підалгебри розмірності 2 в алгебрі Лі $sa_2(\mathbb{k})$. При цьому опис двовимірних абелевих підалгебр алгебри $sa_2(\mathbb{k})$ дає теорема 5.1.9.

5.2 Алгебри Лі $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$ та $sa_2^{\mathbf{pow}}(\Bbbk)$.

Ідея опису централізаторів, описана для $sa_2(\Bbbk)$ у попередньому підрозділі, не працює повною мірою для алгебри $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$ (нагадаємо, що це алгебра Лі всіх диференціювань поля раціональних функцій від двох змінних над полем $\Bbbk$ з нульовою дивергенцією). Причина полягає у тому, що образ гомоморфізму ad : $\widetilde{P_2}(\Bbbk) \to \mathrm{Der}(\Bbbk(x, y))$ лише міститься у $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$, але, взагалі кажучи, не співпадає з цією алгеброю. Це пояснюється тим, що потенціал для диференціювання з раціональними коефіцієнтами не зобов'язаний бути раціональною функцією. Наприклад, для диференціювання з нульовою дивергенцією $D = -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}$ не існує раціональної функції φ з $\mathrm{ad}\,\varphi = D$, бо тоді б ми мали $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{y}$, що неможливо.

Найбільше, що ми можемо зробити, це обмежитися образом гомоморфізму ad і описати централізатори і максимальні підалгебри для цієї достатньо великої підалгебри в $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$.

Очевидно, справедливе наступне твердження, доведення якого повторює доведення леми 5.1.2.

Лема 5.2.1. *Алгебра Лі* $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ *ізоморфна факторалгебрі алгебри* $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$ *за її центром* $Z(\widetilde{P_2}(\Bbbk)) = \Bbbk$.

Мають місце наступні результати, що є аналогами Теорем 5.1.3 і 5.1.9. Ми наводимо схему доведення, оскільки в наступному твердженні мова йде про централізатори елементів не у всій алгебрі Лі $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$, а лише в її підалгебрі $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$.

Твердження 5.2.2. *Нехай* $D = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ *відмінний від нуля елемент алгебри Лі* $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$. *Нехай* $f(x, y) \in \Bbbk(x, y)$ *потенціал, тобто така раціональна функція, що* $\frac{\partial f}{\partial x} = Q(x, y)$ *та* $\frac{\partial f}{\partial y} = -P(x, y)$. *Нехай* $\bar{f}$ *породжуюча раціональна функція для* f. *Тоді*

1) якщо $f(x,y)$ не є раціональною функцією Якобі, то

$$C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) = \Bbbk(\bar{f}) \cdot \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

2) якщо $f(x,y)$ Якобієва раціональна функція і $g(x,y)$ раціональна функція, така що $[f,g] \in \Bbbk^*$, то

$$C_{sa_2(\Bbbk)}(D) = \Bbbk(f) \cdot \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \Bbbk \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Доведення. Ідея, як і у випадку многочленів, полягає у наступному. Для диференціювання $D \in \operatorname{Im} \mathrm{ad}$, використовуючи опис централізаторів елементів у $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$, ми дамо опис прообразу $\mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D))$ централізатора $C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)$ відносно $\mathrm{ad} : \widetilde{P_2}(\Bbbk) \to \mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ і скористаємося тим, що

$$C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(D) = \mathrm{ad}(\mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D))).$$

Нагадаємо, що $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f) = \Bbbk(\bar{f})$ (див. розділ 4, Твердження 4.1.10). Під дією гомоморфізму $\mathrm{ad} : P_2(\Bbbk) \to \mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ раціональна функція $\bar{f}$ відображається у диференціювання $\mathrm{ad}\, \bar{f} = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$. Нехай

$$D_1 = P_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

довільний елемент з $C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)$. За Лемою 5.2.1 існує така раціональна функція $f_1(x,y)$, що $\mathrm{ad}\, f_1 = D_1$. Оскільки $\ker \mathrm{ad} = \Bbbk$, то $[f, f_1]$ міститься у $\Bbbk$.

1) Якщо f не Якобієва раціональна функція, то маємо $[f, f_1] = 0$. Тому f_1 міститься у $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f) = \Bbbk(\bar{f})$, і отже $\mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)) = \Bbbk(\bar{f})$. Із сюр'єктивності $\mathrm{ad} : \widetilde{P_2}(\Bbbk)(\Bbbk) \to \mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ маємо

$$C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) = \mathrm{ad}(\Bbbk(\bar{f})) = \Bbbk(\bar{f}) \cdot \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

2) Нехай тепер f раціональна функція Якобі, і нехай g така раціональна функція, що $[f,g] = c \in \Bbbk^*$.

Як і в доведенні Теореми 5.1.3 доводиться

$$\mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)) = \{h \in \Bbbk(x,y) |\ [h,f] \in \Bbbk\} = C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f) + \Bbbk g = \Bbbk(\bar{f}) + \Bbbk g,$$

тому

$$C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) = \mathrm{ad}(\mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D))) = \mathrm{ad}(\Bbbk(\bar{f}) + \Bbbk g) = \Bbbk(f) \cdot \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \right) + \Bbbk \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \right),$$

що й доводить необхідне твердження. □

Наступна лема є аналогом леми 5.1.8, і тому ми не наводимо її доведення.

Лема 5.2.3. *Нехай $L = \Bbbk(f) + \Bbbk g$ підалгебра алгебри Лі $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$ з $[f,g] = \det(J(f,g)) = c \in \Bbbk^*$. Якщо A нільпотентна підалгебра алгебри L класу нільпотентності щонайбільше 2, тоді або $A \subseteq \Bbbk(f)$, або A міститься у підалгебрі $\Bbbk + \Bbbk f + \Bbbk(g + p(f))$ для деякого $p(t) \in \Bbbk(t)$.*

Опис максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ вказано в наступному твердженні, доведення якого значною мірою повторює доведення теореми 5.1.9. Ми наводимо це доведення для повноти викладу, з врахуванням того, що є деяка специфіка для диференціювань з раціональними, а не поліноміальними коефіцієнтами.

Твердження 5.2.4. *Нехай A максимальна абелева підалгебра алгебри Лі $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$. Тоді*

1) якщо $\dim A = \infty$, то

$$A = \Bbbk(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \right),$$

де $f(x,y)$ замкнена раціональна функція в $\Bbbk(x,y)$.

Навпаки, для довільної замкненої раціональною функції f, підалгебра

$$\Bbbk(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

є максимальною абелевою підалгеброю в $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$*;*

2) якщо $\dim A < \infty$*, то*

$$A = \Bbbk D_1 + \Bbbk D_2,$$

де $D_1 = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ *і* $D_2 = -\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ *для деяких раціональних функцій* $f, g \in \Bbbk(x, y)$*, таких що* $\det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$*.*

Навпаки, для довільних f, g *таких, що* $\det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$*, підалгебра*

$$\Bbbk D_1 + \Bbbk D_2,$$

де D_1 *і* D_2 *визначені як вказано вище, є максимальною абелевою підалгеброю в* $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$*.*

Доведення. Нехай D довільний відмінний від нуля елемент з A. Тоді алгебра A міститься у централізаторі $C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk)))}(D)$, отже A є максимальною абелевою підалгеброю алгебри $C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)$. За Твердженням 5.2.2 або

$$C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) = \Bbbk(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

або

$$C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) = \Bbbk(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \Bbbk \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

У першому випадку f замкнена раціональна функція у $\Bbbk(x, y)$, у другому випадку f і g задовольняють умову $[f, g] = \det(J(f, g)) \in \Bbbk^*$. В першому випадку $C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)$ є абелевою підалгеброю у $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$. Тому, $A = C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk)))}(D) = \Bbbk(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Розглянемо другий випадок. Позначимо для зручності

$$L = \mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)).$$

Тоді $\mathrm{ad}^{-1}(A)$ підалгебра в L. Легко бачити, що $L = \Bbbk(f) + \Bbbk g$. Оскільки $\ker \mathrm{ad} = Z(\widetilde{P_2}(\Bbbk))) = \Bbbk$, робимо висновок, що $\mathrm{ad}^{-1}(A)$ нільпотентна підалгебра класу нільпотентності щонайбільше 2. За Лемою 5.2.3 виконується або $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \mathbb{k}(f)$, або $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \mathbb{k}+\mathbb{k}f+\mathbb{k}(g+p(f))$ для деякою раціональною функції $p(t) \in \mathbb{k}(t)$. Із включення $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \mathbb{k}(f)$ випливає, що $A \subseteq \mathbb{k}(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Оскільки A максимальна абелева підалгебра у $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\mathbb{k}))$, то ми одержуємо $A = \mathbb{k}(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Нехай тепер $\mathrm{ad}^{-1}(A) \subseteq \mathbb{k} + \mathbb{k}f + \mathbb{k}(g + p(f))$. Застосовуючи відображення ad отримуємо включення $A \subseteq \mathrm{ad}(\mathbb{k} + \mathbb{k}f + \mathbb{k}(g + p(f))) = \mathbb{k}D_1 + \mathbb{k}D_2$, де $D_1 = \mathrm{ad}\, f, D_2 = \mathrm{ad}(g + p(f))$. Підалгебра $\mathbb{k}D_1 + \mathbb{k}D_2$ абелева, і тому $A = \mathbb{k}D_1 + \mathbb{k}D_2$. Перепозначаючи $g + p(f)$ як g, маємо $D_1 = \mathrm{ad}\, f, D_2 = \mathrm{ad}\, g$. Ми довели необхідність обох умов твердження.

Нехай f замкнена раціональна функція. Як і для многочленів можна показати, що підалгебра

$$\mathbb{k}(f) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

є максимальною абелевою підалгеброю у алгебрі Лі $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\mathbb{k}))$. Нехай тепер f і g такі раціональні функції у $\mathbb{k}(x, y)$, що $\det(J(f, g)) \in \mathbb{k}^*$. Тоді $D_1 = \mathrm{ad}\, f$ і $D_2 = \mathrm{ad}\, g$ комутують. Отже $A = \mathbb{k}D_1 + \mathbb{k}D_2$ абелева двовимірна підалгебра у алгебрі Лі $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\mathbb{k}))$. Як і у випадку многочленів можна довести, що A максимальна абелева підалгебра. Достатність обох умов твердження встановлено. $\square$

У попередньому підрозділі було вказано, що неможливо дати повний опис централізаторів елементів в алгебрі Лі $\widetilde{sa_2}(\mathbb{k})$ диференціювань із нульовою дивергенцією з коефіцієнтами у полі раціональних функцій використовуючи ідеї з підрозділу, присвяченого диференціюванням кілець многочленів від двох змінних. Це зумовлено несюр'єктивністю гомоморфізму ad. Якщо ж розглянути коефіцієнти з кільця формальних степеневих рядів, то сюр'єктивність відображення ad зберігається і доведення з випадку диференціювань кільця многочленів від двох змінних можуть бути модифіковані для цього випадку. Як і у випадку поліноміальних коефіцієнтів маємо наступну лему.

Лема 5.2.5. *Алгебра Лі* $sa_2^{pow}(\mathbb{k})$ *ізоморфна факторалгебрі алгебри* $\mathbb{k}[[x,y]]$ *по підалгебрі* $Z(\mathbb{k}[[x,y]]) = \mathbb{k}$.

Доведення. Розглянемо гомоморфізм алгебр Лі $\mathrm{ad} : \mathbb{k}[[x,y]] \to sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$. Його ядром є центр алгебри $\mathbb{k}[[x,y]]$, що за Лемою 4.2.7 співпадає із полем $\mathbb{k}$. Далі, як і у випадку поліноміальних коефіцієнтів, доводиться, що образ гомоморфізму ad співпадає з алгеброю $sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$.

Дивергенція довільного внутрішнього диференціювання дорівнює нулю:

$$\mathrm{div}(\mathrm{ad}\, f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Отже образ гомоморфізму ad міститься в алгебрі $sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$.

Покажімо, що образ ad насправді співпадає з $sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$. Нехай $D = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ довільний елемент алгебри $sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$, тобто $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Оскільки для рядів має місце аналог Леми 5.1.1, ця умова забезпечує існування ряду $\varphi(x,y)$ (потенціалу) такого, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q(x,y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -P(x,y).$$

Для φ ми отримуємо

$$[\varphi, x] = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = P(x,y), \quad [\varphi, y] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q(x,y),$$

іншими словами $\mathrm{ad}(\varphi) = D$, що доводить сюр'єктивність відображення $\mathrm{ad} : \mathbb{k}[[x,y]] \to sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$. Оскільки, як було зазначено вище, $\ker \mathrm{ad} = Z(\mathbb{k}[[x,y]]) = \mathbb{k}$, отримуємо $\mathbb{k}[[x,y]]/\mathbb{k} \simeq sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$. Лему доведено. $\square$

Доведення наступної теореми є аналогічним доведенню леми з попереднього розділу і тому ми наведемо його лише схематично. Зауважимо лише, що насправді ми використовували результати Плоскі, які є аналогом теореми з роботи Новіцкі і Нагати про підкільце констант диференціювання кільця многочленів від двох змінних.

Теорема 5.2.6. *Нехай* $D = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ *відмінний від нуля елемент алгебри Лі* $sa_2^{pow}(\mathbb{k})$. *Нехай* $f(x,y) \in \mathbb{k}[[x,y]]$ *такий ряд, що* $D = \operatorname{ad} f$ *і нехай* $\bar{f}$ *породжуючий ряд для* f. *Тоді*

1) якщо $f(x,y)$ *не ряд Якобі, то*

$$C_{sa_2^{pow}(\mathbb{k})}(D) = \mathbb{k}[[\bar{f}]] \operatorname{ad}(\bar{f});$$

2) якщо $f(x,y)$ *ряд Якобі і* $g(x,y)$ *такий ряд, що* $\det(J(f,g)) \in \mathbb{k}^*$, *то*

$$C_{sa_2^{pow}(\mathbb{k})}(D) = \mathbb{k}[[f]] \operatorname{ad}(f) + \mathbb{k} \operatorname{ad}(g).$$

Доведення. Оскільки за Лемою 5.2.5 відображення $\operatorname{ad} : \mathbb{k}[[x,y]] \to sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$ сюр'єктивне, ми отримуємо

$$C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(D) = C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(\operatorname{ad} f) = \operatorname{ad} \operatorname{ad}^{-1}(C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(\operatorname{ad} f)).$$

Також маємо

$$\operatorname{ad}^{-1}(C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(\operatorname{ad} f)) = \{h|\ [f,h] \in \mathbb{k}\}.$$

Якщо f не є рядом Якобі, тоді $\operatorname{ad}^{-1}(C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(\operatorname{ad} f)) = C(f) = \mathbb{k}[[\bar{f}]]$. Тому, $C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(D) = \operatorname{ad}(\mathbb{k}[[\bar{f}]]) = \mathbb{k}[[\bar{f}]] \operatorname{ad}(\bar{f})$, що й доводить 1).

Якщо ж існує такий ряд g, що $[f,g] = c \in \mathbb{k}^*$, тоді за Лемою 4.2.9 можемо вважати, що $\bar{f} = f$. легко бачити, що

$$\operatorname{ad}^{-1}(C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(\operatorname{ad} f)) = \{h|\ [f,h] \in \mathbb{k}\} = C(f) + \mathbb{k}g = \mathbb{k}[[f]] + \mathbb{k}g.$$

Тому $C_{sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})}(D) = \operatorname{ad}(\mathbb{k}[[f]] + \mathbb{k}g) = \mathbb{k}[[f]] \operatorname{ad}(f) + \mathbb{k} \operatorname{ad}(g)$, що й доводить другу частину теореми. Теорему доведено. □

Доведення наступної леми є аналогічним доведенню леми з попереднього розділу і тому ми не наводимо його.

Лема 5.2.7. *Нехай* $L = \mathbb{k}[[f]] + \mathbb{k}g$ *підалгебра алгебри Лі* $\mathbb{k}[[x,y]]$ *з* $[f,g] = c \in \mathbb{k}^*$. *Якщо* A *нільпотентна підалгебра в* L *і клас нільпотентності* A *не перевищує* 2, *то або* $A \subseteq \mathbb{k}[[f]]$ *або* A *міститься в підалгебрі* $\mathbb{k} + \mathbb{k}f + \mathbb{k}(g + p(f))$ *для деякого* $p(t) \in \mathbb{k}[[t]]$.

Теорема 5.2.8. *Нехай A максимальна абелева підалгебра в $sa_2^{pow}(\mathbb{k})$. Тоді*

1) якщо $\dim A = \infty$, то $A = \mathbb{k}[[f]]\,\mathrm{ad}(f)$, де $f(x,y)$ максимальний ряд. Навпаки, для довільного максимального ряду f, підалгебра $\mathbb{k}[[f]]\,\mathrm{ad}(f)$ є максимальною абелевою підалгеброю в $sa_2^{pow}(\mathbb{k})$;

2) якщо $\dim A < \infty$, то $A = \mathbb{k}D_1 + \mathbb{k}D_2$, де $D_1 = \mathrm{ad}(f)$, $D_2 = \mathrm{ad}(g)$ для деяких f та g, таких що $\det(J(f,g)) \in \mathbb{k}^*$. Навпаки, для довільних f і g, таких що $[f,g] \in \mathbb{k}^*$, підалгебра $\mathbb{k}D_1 + \mathbb{k}D_2$, де D_1 і D_2 визначені як вище, є максимальною абелевою підалгеброю алгебри $sa_2^{pow}(\mathbb{k})$.

Доведення. Доведення даної теореми повністю повторює доведення Теореми 5.1.9, якщо в останній замінити многочлени на формальні степеневі ряди. При доведенні ми суттєво використовуємо результати роботи Плоскі про централізатори елементів в алгебрі Лі

$\square$

5.3 Спеціальна афінна алгебра Лі $sa_2(\Bbbk)$ в характеристиці $p > 0$

Лема 5.3.1. *Нехай* $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} \in \mathrm{Der}(\Bbbk[x, y])$. *Тоді потенціал для* D, *тобто* $f \in \Bbbk[x, y]$ *такий, що* $D = \mathrm{ad}\, f$, *існує тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{div} D = 0$, P *не містить мономів типу* $x^i y^{jp-1}$ *і* Q *не містить мономів типу* $x^{ip-1}y^j$.

Доведення. Необхідність. Якщо $D = \mathrm{ad}\, f$, то $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$ і $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$. Оскільки $\frac{\partial x^{pi}y^j}{\partial x} = \frac{\partial x^i y^{pj}}{\partial y} = 0$, звідси випливає, що P і Q не містять мономів типу $x^i y^{jp-1}$ і $x^{ip-1}y^j$ відповідно. Також маємо $\mathrm{div} D = P_x + Q_y = -f_{yx} + f_{xy} = 0$.

Доведемо тепер достатність. Припустімо, що $\mathrm{div} D = 0$ і многочлени P та Q не містять мономів типу $x^i y^{jp-1}$ і $x^{ip-1}y^j$ відповідно. Оскільки P не містить мономів $x^i y^{jp-1}$, існує многочлен $\varphi \in \Bbbk[x, y]$, такий що $\varphi_y = -P$. Тому $P_x = -\varphi_{xy} = -Q_y$, $(\varphi_x - Q)_y = 0$, і ми отримуємо $\varphi_x - Q = \xi$, де $\xi \in \Bbbk[x, y^p]$. Оскільки φ_x і Q не містять мономів $x^{ip-1}y^j$, то ξ також не містить мономів цього типу. Тому існує $\psi \in \Bbbk[x, y^p]$ з $\psi_x = \xi$. Для $f = \varphi - \psi$ одержуємо $f_x = \varphi_x - \psi_x = \varphi_x - \xi = Q$ і $f_y = \varphi_y - \psi_y = \varphi_y = -P$, тобто $\mathrm{ad}\, f = D$, що доводить необхідне твердження. □

Лема 5.3.2. *Нехай* $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} \in sa_2(\Bbbk)$. *Тоді* P *не містить мономів типу* $x^i y^{jp-1}$, *де* $i \neq 0$ *по модулю* p, *і* Q *не містить мономів типу* $x^{ip-1}y^j$, *де* $j \neq 0$ *по модулю* p.

Доведення. Запишемо P і Q як многочлени від змінних x, y з коефіцієнтами, які в свою чергу є многочленами від x^p, y^p.

$$P = \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{i,j} x^i y^j, \quad Q = \sum_{i,j=0}^{p-1} b_{i,j} x^i y^j, \quad a_{i,j}, b_{i,j} \in \Bbbk[x^p, y^p].$$

Тоді, як неважко переконатися, мають місце рівності

$$P_x + Q_y = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} i x^{i-1} y^j - \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-1} j b_{i,j} x^i y^{j-1} =$$
$$\sum_{i=0}^{p-2}\sum_{j=0}^{p-2}((1+i)a_{i+1,j} + (j+1)b_{i,j+1})x^i y^j +$$
$$\sum_{i=0}^{p-2}(i+1)a_{i+1,p-1}x^i y^{p-1} + \sum_{j=0}^{p-2}(j+1)b_{p-1,j+1}x^{p-1}y^j = 0.$$

Зокрема ми отримуємо $a_{i+1,p-1} = 0$ і $b_{p-1,j+1}$ для $i,j = \overline{0,p-2}$, що доводить Лему. □

Ми розглядаємо гомоморфізм алгебр Лі $\mathrm{ad} : P_2(\Bbbk) \to sa_2(\Bbbk)$ і підалгебру $\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$ алгебри $sa_2(\Bbbk)$. Дане відображення коректно визначене, бо $\mathrm{ad}\, f = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ і тому $\mathrm{div}\,\mathrm{ad}\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

На відміну від випадку нульової характеристики, цей гомоморфізм не сюр'-єктивний. Але образ ad залишається все ж достатньо великим.

Твердження 5.3.3.

$$sa_2(\Bbbk) = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) + \Bbbk[x^p, y^p]y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x} + \Bbbk[x^p, y^p]x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Доведення. Очевидно права частина записаного у формулюванні співвідношення міститься в $sa_2(\Bbbk)$. Візьмемо довільне диференціювання $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} \in sa_2(\Bbbk)$. Тоді, враховуючи попередню лему, отримаємо

$$P = \tilde{P} + ay^{p-1}, \quad Q = \tilde{Q} + bx^{p-1}, \quad a, b \in \Bbbk[x^p, y^p],$$

де многочлени $\tilde{P}$ і $\tilde{Q}$ не містять мономів $x^i y^{jp-1}$ і $x^{ip-1}y^j$ відповідно. За Лемою 5.3.1 диференціювання вигляду $\tilde{D} = \tilde{P}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}\frac{\partial}{\partial y}$ лежить у підалгебрі $\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$. Тому, як неважко переконатися, має місце рівність

$$sa_2(\Bbbk) \subseteq \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) + \Bbbk[x^p, y^p]y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x} + \Bbbk[x^p, y^p]x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}.$$

□

Вкажемо тепер загальну характеризацію підалгебр $\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$ і $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ відповідно алгебр Лі $sa_2(\Bbbk)$ та $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$.

Твердження 5.3.4.

$$\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j}, \quad \mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk)) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk(x^p, y^p)\delta_{i,j}$$

де $\delta_{i,j} := -jx^iy^{j-1}\frac{\partial}{\partial x} + ix^{i-1}y^j\frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{ad}(x^iy^j)$.

Доведення. Ми використовуємо Лему 4.3.5:

$$\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) = \mathrm{ad}(\sum_{i,j=0}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]x^iy^j) = \sum_{i,j=0}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\,\mathrm{ad}(x^iy^j) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j}$$

$$\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk)) = \mathrm{ad}(\sum_{i,j=0}^{p-1} \Bbbk(x^p, y^p)x^iy^j) = \sum_{i,j=0}^{p-1} \Bbbk(x^p, y^p)\,\mathrm{ad}(x^iy^j) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk(x^p, y^p)\delta_{i,j}.$$

□

Лема 5.3.5. $\widetilde{sa_2}(\Bbbk) = \Bbbk(x^p, y^p) \otimes sa_2(\Bbbk)$.

Доведення. Зрозуміло, що права частина міститься в $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$. Нехай $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ елемент з $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$. Нехай d добуток знаменників раціональних функцій P і Q. Тоді d^pD належить $\mathrm{Der}(\Bbbk[x, y])$ і має нульову дивергенцію, бо $\mathrm{div}(d^pD) = \frac{\partial}{\partial x}(d^pP) + \frac{\partial}{\partial y}(d^pQ) = d^p(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) = d^p\mathrm{div}D = 0$. Отже D належить $\Bbbk(x^p, y^p) \otimes sa_2(\Bbbk)$. □

Комбінуючи Лему 5.3.5 з Твердженнями 5.3.3 та 5.3.4 , ми отримуємо наступне:

Твердження 5.3.6.

$$sa_2(\mathbb{k}) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} \mathbb{k}[x^p, y^p]\delta_{i,j} + \mathbb{k}[x^p, y^p]y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{k}[x^p, y^p]x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\widetilde{sa_2}(\mathbb{k}) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} \mathbb{k}(x^p, y^p)\delta_{i,j} + \mathbb{k}(x^p, y^p)y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{k}(x^p, y^p)x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Лема 5.3.7. *1)* $\delta_{kp+i,lp+j} = x^{kp}y^{lp}\delta_{i,j}$;

2) $[\delta_{i,j}, \delta_{kl}] = (il - jk)\delta_{k+i-1,l+j-1}$;

3) $[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \delta_{i,j}] = i\delta_{i-1,j+p-1}, \quad [x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y},\ \delta_{i,j}] = j\delta_{i+p-1,j-1}$.

Доведення. 1) Легко обчислюється

$$\begin{aligned}\delta_{kp+i,lp+j} = &-(lp+j)x^{kp+i}y^{lp+j-1}\frac{\partial}{\partial x} + (kp+i)x^{kp+i-1}y^{lp+j}\frac{\partial}{\partial y} = \\ &- jx^{kp+i}y^{lp+j-1}\frac{\partial}{\partial x} + ix^{kp+i-1}y^{lp+j}\frac{\partial}{\partial y} = \\ &x^{kp}y^{lp}(-jx^iy^{j-1}\frac{\partial}{\partial x} + ix^{i-1}y^j\frac{\partial}{\partial y}) = x^{kp}y^{lp}\delta_{i,j}.\end{aligned}$$

2) Випливає з обчислень

$$\begin{aligned}[\delta_{i,j}, \delta_{k,l}] = &[\mathrm{ad}(x^iy^j), \mathrm{ad}(x^ky^l)] = \mathrm{ad}([x^iy^j, x^ky^l]) = \\ &\mathrm{ad}(ilx^{i-1}y^jx^ky^{l-1} - jkx^iy^{j-1}x^{k-1}y^l) = \\ &\mathrm{ad}((il-jk)x^{i+k-1}y^{j+l-1}) = (il-jk)\delta_{i+k-1,j+l-1}.\end{aligned}$$

3) Випливає з

$$\begin{aligned}[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \delta_{i,j}] = [y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, -jx^iy^{j-1}\frac{\partial}{\partial x} + ix^{i-1}y^j\frac{\partial}{\partial y}] = \\ -y^{p-1}jix^{i-1}y^{j-1}\frac{\partial}{\partial x} + y^{p-1}i(i-1)x^{i-2}y^j\frac{\partial}{\partial y} - ix^{i-1}y^j(p-1)y^{p-2}\frac{\partial}{\partial x} = \\ -i(j+p-1)x^{i-1}y^{j+p-2}\frac{\partial}{\partial x} + i(i-1)x^{i-2}y^{j+p-1}\frac{\partial}{\partial y} = i\delta_{i-1,j+p-1}\end{aligned}$$

і

$$[x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y},\ \delta_{i,j}] = [x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}, -jx^iy^{j-1}\frac{\partial}{\partial x} + ix^{i-1}y^j\frac{\partial}{\partial y}] =$$
$$-x^{p-1}j(j-1)x^iy^{j-2}\frac{\partial}{\partial x} + jx^iy^{j-1}(p-1)x^{p-2}\frac{\partial}{\partial y} + x^{p-1}ijx^{i-1}y^{j-1}\frac{\partial}{\partial y} =$$
$$-j(j-1)x^{i+p-1}y^{j-2}\frac{\partial}{\partial x} + j(i+p-1)x^{i+p-2}y^{j-1}\frac{\partial}{\partial y} = j\delta_{i+p-1,j-1}.$$

□

Твердження 5.3.8. *1)* $\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) = [sa_2(\Bbbk), sa_2(\Bbbk)]$.

2) $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk)) = [\widetilde{sa_2}(\Bbbk), \widetilde{sa_2}(\Bbbk)]$.

Доведення. 1) Оскільки $[x^i\frac{\partial}{\partial y}, y^j\frac{\partial}{\partial x}] = -jx^iy^{j-1}\frac{\partial}{\partial x} + ix^{i-1}y^j\frac{\partial}{\partial y} = -\delta_{i,j}$, ми отримуємо включення $\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) \subseteq [sa_2(\Bbbk), sa_2(\Bbbk)]$.

Для того, щоб довести інше включення $[sa_2(\Bbbk), sa_2(\Bbbk)] \subseteq \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$, достатньо показати, що мають місце включення $[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] \subseteq \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$ та $[x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] \subseteq \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$. Але за лемою вище ми маємо

$$[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \delta_{i,j}] = i\delta_{i-1,j+p-1} \text{ and } [x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y},\ \delta_{i,j}] = j\delta_{i+p-1,j-1}.$$

Оскільки за тією ж лемою $\delta_{k,l} \in \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$ для усіх k і l, ми отримуємо

$$[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] \subseteq \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), \quad [x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] \subseteq \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)).$$

2) Оскільки $\widetilde{P_2}(\Bbbk) = \Bbbk(x^p, y^p) \otimes P_2(\Bbbk)$ та $\widetilde{sa_2}(\Bbbk) = \Bbbk(x^p, y^p) \otimes sa_2(\Bbbk)$, то твердження 2) випливає з 1). □

Зокрема, Твердження 5.3.8 означає, що, на відміну від випадку нульової характеристики, у простій характеристиці алгебри $sa_2(\Bbbk)$ та $\widetilde{sa_2}(\Bbbk)$ не є простими. Порахуймо похідний ряд та нижній центральний ряд алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$.

Твердження 5.3.9. *Похідний ряд алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$ має вигляд*

$$sa_2(\Bbbk)^{(1)} = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j},$$

$$sa_2(\Bbbk)^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=0\\ 0<i+j<2p-2}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j},$$

$$sa_2(\Bbbk)^{(n)} = sa_2(\Bbbk)^{(2)}, n > 2, \quad \text{якщо } p > 2,$$

$$sa_2(\Bbbk)^{(n)} = 0, n > 2, \quad \text{якщо } p = 2.$$

Зокрема, у характеристиці 2 *алгебра Лі $sa_2(\Bbbk)$ є розв'язною ступеня розв'язності* 3.

Доведення. Ми вже знаємо із Твердження 5.3.8, що $sa_2(\Bbbk)^{(1)} = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$. Тому

$$sa_2(\Bbbk)^{(2)} = [\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))].$$

Зауважмо, що $\delta_{p-1,p-1}$ не міститься в $[\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))]$. Дійсно, припустімо протилежне. Тоді для деяких індексів $i, j, k, l \leqslant p-1$ маємо

$$[\delta_{i,j}, \delta_{k,l}] = (il - jk)\delta_{k+i-1,l+j-1},$$

де $k + i - 1 = p - 1 + ap$ та $l + j - 1 = p - 1 + bp$. Це означає, що $\delta_{k+i-1,l+j-1}$ є множником $\delta_{p-1,p-1}$. Тоді маємо $k = p + ap - i$ та $l = p + bp - j$, звідки випливає, що $(il - jk) = (-ij + ji) = 0$, і тому $[\delta_{i,j}, \delta_{k,l}] = 0$.

З іншого боку із співвідношень

$$[\delta_{1,0}, \delta_{k,l}] = l\delta_{k,l-1}, \quad [\delta_{0,1}, \delta_{k,l}] = -k\delta_{k-1,l}$$

випливає, що $\delta_{k,l}$ міститься у комутаторі $[\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))]$ для усіх (k, l), $0 \leqslant k, l \leqslant p-1$, $(k, l) \neq (0, 0)$, $(k, l) \neq (p-1, p-1)$. Тому

$$sa_2(\Bbbk)^{(2)} = [\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] = \sum_{\substack{i,j=0\\ 0<i+j<2p-2}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j}.$$

Якщо $p > 2$, то $\delta_{0,1}$, $\delta_{1,0}$ і $\delta_{1,1}$ належать $sa_2(\Bbbk)^{(2)}$. Використовуючи співвідношення

$$[\delta_{1,0}, \delta_{k,l}] = l\delta_{k,l-1}, \quad [\delta_{0,1}, \delta_{k,l}] = -k\delta_{k-1,l}, \quad [\delta_{1,1}, \delta_{k,l}] = (l-k)\delta_{k,l},$$

ми отримуємо, що $[sa_2(\Bbbk)^{(2)}, sa_2(\Bbbk)^{(2)}] = sa_2(\Bbbk)^{(2)}$ а отже й $sa_2(\Bbbk)^{(n)} = sa_2(\Bbbk)^{(2)}$ для $n > 2$.

Якщо $p = 2$ то $sa_2(\Bbbk)^{(2)} = \Bbbk[x^2, y^2]\frac{\partial}{\partial x} + \Bbbk[x^2, y^2]\frac{\partial}{\partial y}$ абелева. Тому в цьому випадку $sa_2(\Bbbk)^{(n)} = 0$ для $n > 2$. □

Твердження 5.3.10. *Нижній центральний ряд алгебри Лі $sa_2(\Bbbk)$ має вигляд*

$$sa_2(\Bbbk)^1 = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j},$$

$$sa_2(\Bbbk)^n = sa_2(\Bbbk)^2 = sa_2(\Bbbk)^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=0 \\ 0<i+j<2p-2}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j}, \quad n > 2.$$

Доведення. Ми вже довели, що $sa_2(\Bbbk)^1 = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$. Тому

$$\begin{aligned} sa_2(\Bbbk)^2 =& [sa_2(\Bbbk), sa_2(\Bbbk)^1] = [sa_2(\Bbbk), \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] = \\ & [\Bbbk[x^p, y^p]y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x} + \Bbbk[x^p, y^p]x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), P_2(\Bbbk)] = \\ & [\Bbbk[x^p, y^p]y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] + [\Bbbk[x^p, y^p]x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] + \\ & [\mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] = \\ & [y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] + [x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] + sa_2(\Bbbk)^{(2)}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \delta_{i,j}] = i\delta_{i-1,j+p-1} = \begin{cases} i\delta_{i-1,p-1}, & j = 0 \\ iy^p\delta_{i-1,j-1}, & j \neq 0 \end{cases}$$

та

$$[x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y},\ \delta_{i,j}] = j\delta_{i+p-1,j-1} = \begin{cases} j\delta_{p-1,j-1}, & i=0 \\ jx^p\delta_{i-1,j-1}, & j\neq 0, \end{cases}$$

отримуємо, що комутатори $[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))]$ та $[x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))]$ мають нульовий перетин із $\Bbbk[x^p, y^p]\delta_{p-1,p-1}$. Тому мають місце включення

$$[y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] \subseteq sa_2(\Bbbk)^{(2)} \text{ та } [x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))] \subseteq sa_2(\Bbbk)^{(2)},$$

що й доводить рівність $sa_2(\Bbbk)^2 = sa_2(\Bbbk)^{(2)}$.

Якщо $p > 2$, то $sa_2(\Bbbk)^2 \supseteq sa_2(\Bbbk)^3 \supseteq sa_2(\Bbbk)^{(3)} = sa_2(\Bbbk)^{(2)} = sa_2(\Bbbk)^2$, і тому $sa_2(\Bbbk)^3 = sa_2(\Bbbk)^2$.

Якщо $p = 2$, то $sa_2(\Bbbk)^2 = \Bbbk[x^2, y^2]\frac{\partial}{\partial x} + \Bbbk[x^2, y^2]\frac{\partial}{\partial y}$. Оскільки для довільних $a, b \in \Bbbk[x^p, y^p]$ має місце рівність

$$[\delta_{1,1}, a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}] = [x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}] = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},$$

ми отримуємо рівність $sa_2(\Bbbk)^3 = [sa_2(\Bbbk), sa_2(\Bbbk)^2] = sa_2(\Bbbk)^2$. □

Зауваження 5.3.11. *Оскільки похідний і нижній центральний ряд алгебри Лі $\widetilde{sa}_2(\Bbbk)$ отримуються за допомогою тензорного множення відповідних рядів алгебри $sa_2(\Bbbk)$ із асоціативною алгеброю $\Bbbk(x^p, y^p)$, достатньо провести обрахунки лише для алгебри $sa_2(\Bbbk)$.*

Твердження 5.3.12. *Нехай*

$$A = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)), \quad B = \sum_{j=0}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]y^j\frac{\partial}{\partial x}, \quad C = \sum_{i=0}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]x^i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тоді A, B і C є підалгебрами в $sa_2(\Bbbk)$, до того ж $sa_2(\Bbbk) = A + B + C$. Крім того, B і C є абелевими підалгебрами і виконується $[B, C] = A$, $[A, B] \subseteq A$ і $[A, C] \subseteq A$.

Доведення. Очевидно A, B і C є підалгебрами в $sa_2(\Bbbk)$. Більш того, B і C абелеві підалгебри. З Твердження 5.3.8 випливає $[B,C] \subseteq A$, $[A,B] \subseteq A$ і $[A,C] \subseteq A$. Оскільки $[x^i\frac{\partial}{\partial y}, y^j\frac{\partial}{\partial x}] = -jx^iy^{j-1}\frac{\partial}{\partial x} + ix^{i-1}y^j\frac{\partial}{\partial y} = -\delta_{i,j}$, отримуємо $[B,C] = A$. □

Опис централізаторів елементів в $\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$ дає наступне

Твердження 5.3.13. *Нехай $D \in \mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))$, нехай $f \in \Bbbk(x,y)$ така раціональна, що $D = \mathrm{ad}\, f$. Тоді*

1) якщо f не є раціональною функцією Якобі, то

$$C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) = \mathrm{ad}(C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f)) = \mathrm{ad}(\Bbbk(x^p, y^p, f));$$

2) якщо ж f раціональна функція Якобі, тобто якщо існує інша раціональна функція $g \in \Bbbk(x,y)$ така, що $[f,g] = 1$, то

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) &= \mathrm{ad}(C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f)) + \Bbbk(x^p, y^p)\,\mathrm{ad}(g) = \\ &= \mathrm{ad}(\Bbbk(x^p, y^p, f)) + \Bbbk(x^p, y^p)\,\mathrm{ad}(g); \end{aligned}$$

Доведення. Нехай $D_1 = \mathrm{ad}(f_1)$ довільне диференціювання з образу гомоморфізму ad, що комутує з D. Це означає, що $[D, D_1] = [\mathrm{ad}\, f, \mathrm{ad}\, f_1] = \mathrm{ad}([f, f_1]) = 0$. Отже, оскільки за Лемою 4.3.1 ядро (центр алгебри $\widetilde{P_2}(\Bbbk)$) гомоморфізму ad співпадає з $\Bbbk(x^p, y^p)$, то D_1 комутує з D тоді і лише тоді, коли $[f, f_1] = c \in \Bbbk(x^p, y^p)$. Припустимо $c \neq 0$. Тоді $[f, f_1c^{-1}] = 1$.

Отже якщо f не є функцією Якобі, то $c = 0$, тобто D_1 комутує з D тоді і лише тоді, коли f_1 міститься у централізаторі $C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f)$, що за Лемою 4.3.6 дорівнює $\Bbbk(x^p, y^p, f)$. Ми показали, що

$$\mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D)) = C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f) = \Bbbk(x^p, y^p, f).$$

Тому $C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D) = \mathrm{ad}(\mathrm{ad}^{-1}(C_{\mathrm{ad}(\widetilde{P_2}(\Bbbk))}(D))) = \mathrm{ad}(C_{\widetilde{P_2}(\Bbbk)}(f)) = \mathrm{ad}(\Bbbk(x^p, y^p, f))$.

Нехай тепер f раціональна функція Якобі, тобто існує така раціональна функція g, що $[f,g] = 1$. Тоді $[f, f_1] = c = c[f,g] = [f, cg]$ еквівалентно до

$[f, f_1 - cg] = 0$, тобто до $f_1 - cg \in C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f)$. Ми отримали, що D_1 комутує з D тоді і лише тоді, коли f_1 міститься у $C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f) + \mathbb{k}(x^p, y^p)g$. Отже

$$\operatorname{ad}^{-1}(C_{\operatorname{ad}(\widetilde{P_2(\mathbb{k})})}(D)) = C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f) + \mathbb{k}(x^p, y^p)g,$$

і тому

$$\begin{aligned} C_{\operatorname{ad}(\widetilde{P_2(\mathbb{k})})}(D) = &\operatorname{ad}(\operatorname{ad}^{-1}(C_{\operatorname{ad}(\widetilde{P_2(\mathbb{k})})}(D))) = \\ &\operatorname{ad}(C_{\widetilde{P_2(\mathbb{k})}}(f)) + \mathbb{k}(x^p, y^p)\operatorname{ad}(g) = \\ &\operatorname{ad}(\mathbb{k}(x^p, y^p, f)) + \mathbb{k}(x^p, y^p)\operatorname{ad}(g), \end{aligned}$$

що й доводить другу частину твердження. □

Зауваження 5.3.14. *Оскільки* $sa_2(\mathbb{k})$ *є підалгеброю в* $\widetilde{sa_2}(\mathbb{k})$*, до для диференціювання* $D \in \operatorname{ad}(P_2(\mathbb{k}))$*,* $D = \operatorname{ad} f$*,* $f \in P_2(\mathbb{k})$*, його централізатор в* $\operatorname{ad}(P_2(\mathbb{k}))$ *є перетином його централізатора в* $\operatorname{ad}(\widetilde{P_2}(\mathbb{k}))$ *з* $\operatorname{ad}(P_2(\mathbb{k}))$*:*

$$C_{\operatorname{ad}(P_2(\mathbb{k}))}(D) = C_{\operatorname{ad}(\widetilde{P_2}(\mathbb{k}))}(f) \cap sa_2(\mathbb{k}).$$

Приклад 5.3.15. *Нехай* $f \in \mathbb{k}[x, y]$*. Припустимо, що* f *не є раціональною функцією Якобі. Тоді, повторюючи доведення першої частини попереднього твердження, у випадку алгебри* $\operatorname{ad}(P_2(\mathbb{k}))$ *отримаємо* $C_{\operatorname{ad}(P_2(\mathbb{k}))}(D) = \operatorname{ad}(C_{P_2(\mathbb{k})}(f))$*.*

Як і в випадку характеристики нуль, маємо наступний результат.

Лема 5.3.16. *Нехай* $D = \operatorname{ad} f \in sa_2(\mathbb{k})$*, нехай* $\lambda \in \mathbb{k}^*$*. Нехай*

$$\begin{aligned} V_\lambda(D) = &\{D_1 \in sa_2(\mathbb{k}) |\ [D, D_1] = \lambda D_1\} \ \text{та} \\ V_\lambda(f) = &\{g \in P_2(\mathbb{k}) |\ [f, g] = \lambda g\} \end{aligned}$$

власні простори, що відповідають власному числу λ *у* $sa_2(\mathbb{k})$ *та* $P_2(\mathbb{k})$ *відповідно. Тоді* $V_\lambda(D) = \operatorname{ad}(V_\lambda(f))$*.*

Доведення. Доведення аналогічне до доведення Леми 5.1.13. Оскільки має місце $[sa_2(\Bbbk), sa_2(\Bbbk)] = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk))$, то з $[D, D_1] = \lambda D_1$, $\lambda \neq 0$, випливає $D_1 = \mathrm{ad}(g)$ для деякого $g \in P_2(\Bbbk)$. Отримуємо умову належності D_1 до власного простору $V_\lambda(D)$:

$$[f, g] = \lambda g + \mu, \quad \mu \in \Bbbk[x^p, y^p] = Z(sa_2(\Bbbk)).$$

Як і в доведенні Леми 5.1.13, звідси випливає необхідне твердження. $\square$

Цілком аналогічно до Твердження 5.3.6 можна довести, що

$$sa_2^{\mathrm{pow}}(\Bbbk) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk[[x^p, y^p]]\delta_{i,j} + \Bbbk[[x^p, y^p]]y^{p-1}\frac{\partial}{\partial x} + \Bbbk[[x^p, y^p]]x^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Також, аналогічно до Леми 5.3.5, маємо представлення $sa_2^{\mathrm{pow}}(\Bbbk) = \Bbbk[[x^p, y^p]] \otimes sa_2(\Bbbk)$. Тому результати, що стосуються похідного та нижнього центрального ряду, мають місце і для алгебр Лі $\Bbbk[[x, y]]$.

Твердження 5.3.17.

$$sa_2^{pow}(\Bbbk)^{(1)} = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j},$$

$$sa_2^{pow}(\Bbbk)^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=0\\ 0<i+j<2p-2}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j},$$

$$sa_2^{pow}(\Bbbk)^{(n)} = sa_2^{pow}(\Bbbk)^{(2)}, n > 2, \quad \textit{якщо } p > 2,$$

$$sa_2^{pow}(\Bbbk)^{(n)} = 0, n > 2, \quad \textit{якщо } p = 2.$$

Твердження 5.3.18.

$$sa_2^{pow}(\Bbbk)^1 = \mathrm{ad}(P_2(\Bbbk)) = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>0}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j},$$

$$sa_2^{pow}(\Bbbk)^n = sa_2(\Bbbk)^2 = sa_2^{pow}(\Bbbk)^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=0\\ 0<i+j<2p-2}}^{p-1} \Bbbk[x^p, y^p]\delta_{i,j}, \quad n > 2.$$

Висновки до розділу 5

Цей розділ присвячено дослідженню структури алгебри Лі $sa_2(\mathbb{k})$ та алгебр, що подібні до неї, тобто алгебр Лі $\widetilde{sa}_2(\mathbb{k})$ та $sa_2^{\mathrm{pow}}(\mathbb{k})$. Основні результату цього розділу опубліковано в статтях [48] та [30].

У підрозділі 5.1 розглянуто випадок характеристики нуль. Для опису централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр цієї алгебри Лі суттєво використовуються результати попередніх розділів про будову і властивості замкнених многочленів, а також про будову централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $P_2(\mathbb{k})$. Підрозділ 5.3 присвячений простій характеристиці. Дано опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $sa_2(\mathbb{k})$ та в подібних до неї алгебрах у характеристиці нуль (оскільки багато доведень тут повторюють випадок нульової характеристики, то ці доведення або дуже скорочені, або взагалі не наводять). Цей опис дано в термінах замкнених многочленів та многочленів Якобі. У випадку простої характеристики пораховано похідний та нижній центральний ряди алгебри $sa_2(\mathbb{k})$.

Висновки

У дисертації автором отримано нові теоретичні результати пов'язані з описом централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрах Лі диференціювань. Отримано також результати пов'язані з описом замкнених раціональних функцій від кількох змінних.

Основними науковими результатами є наступні:

- дано повний опис централізаторів елементів в алгебрі Лі $sa_2(\mathbb{k})$ всіх диференціювань кільця многочленів $\mathbb{k}[x, y]$ з нульовою дивергенцією у випадку основного поля нульової характеристики;
- описано всі максимальні абелеві підалгебри алгебри Лі $sa_2(\mathbb{k})$ у випадку основного поля нульової характеристики;
- описано структуру просторів поліноміальних розв'язків диференціальних рівнянь $D(g) = ag$, $D \in sa_2(\mathbb{k})$;
- отримано опис будови алгебри Лі $sa_2(\mathbb{k})$ у випадку основного поля простої характеристики $p > 0$;
- отримано аналогічні результати для алгебр Лі формальних степеневих рядів;
- вказано достатні умови для того, щоб задана раціональна функція від кількох змінних була замкненою.

Список використаних джерел

[1] Amitsur S. A. Commutative linear differential operators / S. A. Amitsur // Pacific J. Math. — 1958. — Vol. 8. — P. 1—10.

[2] Arzhantsev I. V. Closed polynomials and saturated subalgebras of polynomial algebras / I. V. Arzhantsev, A. P. Petravchuk // Укр. матем. журн. — 2007. — Т. 59, № 12. — С. 1587—1593.

[3] Аржанцев И. В. О насыщенности подполей инвариантов конечных групп / И. В. Аржанцев, А.П.Петравчук // Мат. заметки (отправлено в печать).

[4] Ayad M. Sur les polynômes $f(X, Y)$ tels que $K[f]$ est intégralement fermé dans $K[X, Y]$ / M. Ayad // Acta Arith. — 2002. — Vol. 105, № 1. — P. 9—28.

[5] Ayad M. Irreducibility of $f(u(x, v(y)))$ / M. Ayad // J. Algebra. — 2004. — Vol. 279. — P. 302—307.

[6] Ayad M. On the kernel of some derivations of $K(x_1, \ldots, x_n)$ / Mohamed Ayad, Philippe Ryckelynk // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30, № 5. — P. 2505—2510.

[7] Bavula V. Lüroth field extensions / V. Bavula // J. Pure Appl. Algebra. — 2005. — Vol. 199, № 1-3.— P. 1—10.

[8] Bergman G. M. Centralizers in free associative algebras / G. M. Bergman // Trans. Math. Soc. — 1969. — Vol. 137. — P. 327—344.

[9] Bodin A. Reducibility of rational functions in several variables / Arnaud Bodin // Preprint arXiv.org: math.NT/0510434v3. — 2005. — 14 p.

[10] Bodin A. Irreducibility of hypersurfaces / Arnaud Bodin, Pierre Debes, Salah Najib // Preprint arXiv.org: math.NT/0701919v1. — 2007. — 21 p.

[11] Cartan E. Les groupes de transformations continus, infinis, simples / Elie Cartan // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). — 1909. — Vol. 26. — P. 93—161.

[12] Cygan E. Factorization of polynomials / Ewa Cygan // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 1992. — Vol. 40, № 1. — P. 45—50.

[13] Daigle D. Triangular derivations of $\Bbbk[x_1, x_2, x_3, x_4]$ / D. Daigle, G. Freudenburg // J. Algebra. — 2001, — Vol. 241, № 1. — P. 328—339.

[14] Derksen H. The kernel of a derivation / H. Derksen // Journal of pure and applied Algebra. — 1993, — Vol. 84. — P. 13—16.

[15] Derksen H. Inverse degrees and the Jacobian conjecture / H. Derksen // Communications in Algebra. — 1994, — Vol. 22, № 12. — P. 4793—4794.

[16] Dixmier J. Sur les algebres de Weyl / J. Dixmier // Bull. Soc. Math. France. — 1968. — Vol. 96. — P. 209—242.

[17] Eakin P. A note on finite dimensional subrings of polynomial rings / Paul Eakin // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 31.— P. 75—80.

[18] van den Essen A. Polynomial automorhisms and the Jacobian conjecture / Arno van den Essen. — Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, — Vol. 190. — 2000. — 329 p.

[19] van den Essen A. Rings of constants of the form $k[f]$ / Arno van den Essen, Jean Moulin Ollagnier, Andrzej Nowicki // Comm. Algebra. — 2006. — Vol. 34, № 9. — P. 3315—3321.

[20] Freudenburg G. A note on the kernel of a locally nilpotent derivation / G. Freudenburg // Proceedings of the AMS. — 1996, — Vol. 124, № 1. — P. 27—29.

[21] Freudenburg G. Algebraic theory of locally nilpotent derivations / G. Freudenburg. — Springer Verlag, 2006. — 272 p.

[22] Gordan P. Ueber biquadratische Gleichungen / Paul Gordan // Math. Ann. — 1887. — Vol. 29, № 3. — P. 318—326.

[23] Guillemin V. A formal model of transitive differential geometry / V. Guillemin, S.Sternberg // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967, — Vol. 70. — P. 16—47.

[24] Guillemin V. The classification of the complex primitive infinite pseudogroups / V. Guillemin, D.Quilen, S.Sternberg // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1966, — Vol. 55. — P. 687—690.

[25] Guillemin V. Infinite dimensional primitive Lie algebras / V. Guillemin // J. Differential Geom. — 1970, — Vol. 4, № 3. — P. 257—282.

[26] Hodge W. V. D. Methods of algebraic geometry. Vol. I. Cambridge Mathematical Library / W. V. D. Hodge, D. Pedoe. — Cambridge: Cambridge University Press, 1994. — 440 p. Book I: Algebraic preliminaries, Book II: Projective space, Reprint of the 1947 original.

[27] Iena O. G. On eigenspaces of inner derivations in $P_2(k)$ / O. G. Iena // International Conference on Radicals ICOR-2006 (July 30 – August 5, 2006), Ukraine. — Kyiv, 2006. — P. 38—39.

[28] Єна О. Г. Про власні простори внутрішніх диференціювань у $P_2(k)$ / О. Г. Єна // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — № 4. — С. 11—17.

[29] Iena O. G. On the structure of lie algebra $P_2(k)$ in characteristic $p = 2$ / O. G. Iena // 6-th International Algebraic Conference in Ukraine (July 1–7, 2007). — Kamyantets-Podilsky, 2007. — P. 95—96.

[30] Єна О. Г. Про диференціювання кільця многочленів від двох змінних у простій характеристиці / О. Г. Єна // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2007. — № 4. — С. 23—27.

[31] Igusa J. On a theorem of Lueroth / Jun-ichi Igusa // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math. — 1951. — Vol. 26. — P. 251—253.

[32] Кац В. Г. Простые градуированные алгебры конечного роста / В. Г. Кац // Функциональный анализ и его приложения. — 1967, Т. 1, № 4 — С. 82—83.

[33] Kac V. G. Infinite dimensional Lie algebras / V. G. Kac. — Cambridge University Press, Third Ed, 1990. — 400 p.

[34] Кострикин А. И. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики / А. И. Кострикин, И. Р. Шафаревич // Известия Академии наук СССР, серия математическая. — 1969, Т. 33. — С. 251—322.

[35] Lorenzini D. Reducibility of polynomials in two variables / Dino Lorenzini // J. Algebra. — 1993. — Vol. 156. — P. 65—75.

[36] Makar-Limanov L. On the ring of constants for derivations of power series rings in two variables / Leonid Makar-Limanov, Andrzej Nowicki // Colloq. Math. — 2001. — Vol. 87, № 2. — P. 195—200.

[37] Makar-Limanov L. Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and applications / L. Makar-Limanov // Preprint

[38] Najib S. Une généralisation de'l inégalité de Stein-Lorenzini / Salah Najib // J. Algebra. — 2005. — Vol. 292, № 2. — P. 566—573.

[39] Najib S. Factorisation des polynomes $P(X_1, \ldots, X_n) - \lambda$ et theoreme de Stein: Thesis, University of Lille / S. Najib. — University of Lille, 2005.

[40] Najib S. Sur le spectre d'un polynôme à plusieurs variables / S. Najib // Acta Arith. — 2004, — Vol. 114., № 2 — P. 169—181.

[41] Nowicki A. Polynomial derivations and their rings of constants / A. Nowicki. — Torun: N.Copernicus University Press, 1994. — 170 p.

[42] Nowicki A. Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero / Andrzej Nowicki // J. Pure Appl. Algebra. — 1994. — Vol. 96, № 1. — P. 47—55.

[43] Nowicki A. Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$ / Andrzej Nowicki, Masayoshi Nagata // J. Math. Kyoto Univ. — 1988. — Vol. 28, № 1. — P. 111—118.

[44] Nowicki A. Generators of rings of constants for some diagonal derivations in polynomial rings / Andrzej Nowicki, Jean-Marie Strelcyn // J. Pure Appl. Algebra. — 1995. — Vol. 101, № 2. — P. 207—212.

[45] Ollagnier J. M. On the non-existence of constants of derivations: the proof of a theorem of Jouanolou and its development / Jean Moulin Ollagnier, Andrzej Nowicki, Jean-Marie Strelcyn // Bull. Sci. Math. — 1995. — Vol. 119, № 3. — P. 195—233.

[46] Ollagnier J. M. Algebraic closure of a rational function / J. M. Ollagnier // Qualitative theory of dynamical systems. — 2004. — Vol. 5, № 2. — P. 285—300.

[47] Petravchuk A. P. On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $\mathrm{SA}_2(k)$ / A. P. Petravchuk, O. G. Iena // 5th International Algebraic Conference in Ukraine (July 20-27, 2005). — Odessa, 2005. — P. 152—153.

[48] Petravchuk A. P. On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $SA_2(k)$ / A. P. Petravchuk, O. G. Iena // J. Lie Theory. — 2006. — Vol. 16, № 3. — P. 561—567.

[49] Petravchuk A. P. On closed rational functions in several variables / A. P. Petravchuk, O. G. Iena // 6-th International Algebraic Conference in Ukraine (July 1–7, 2007). — Kamyantets-Podilsky, 2007. — P. 149—150.

[50] Petravchuk A. P. On closed rational functions in several variables / Anatoliy P. Petravchuk, Oleksandr G. Iena // Algebra Discrete Math. — 2007. — № 2. — P. 115—124.

[51] Płoski A. On the Jacobian dependence of power series / A. Płoski // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1975, — Vol. 23, № 4. — P. 407—410.

[52] Rentschler R. Operations du groupe additif sur le plan / R. Rentschler // C.R.Acad. Sci. Paris. — 1968, — Vol. 267. — P. 384—387.

[53] Ruppert W. Reduzibilität ebener Kurven / Wolfgang Ruppert // J. Reine Angew. Math. — 1986. — Vol. 369. — P. 167—191.

[54] Schinzel A. Polynomials with special regard to reducibility, Volume 77 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. With an appendix by Umberto Zannier / A. Schinzel. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 558 p.

[55] Shafarevich I. R. On some infinite-dimensional groups. II / I. R. Shafarevich // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — 1981. — Vol. 45, № 1. — P. 214—226, 240.

[56] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Издание 3-е / И. Р. Шафаревич. — М. : МНЦМО, 2007. — 588 с.

[57] Skryabin S. Representations of the Poisson algebra in prime characteristic / Serge Skryabin // Math. Z. — 2003, — Vol. 243. — P. 563—597.

[58] Shestakov I. P. Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials / Ivan P. Shestakov, Ualbai U. Umirbaev // J. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 17, № 1. — P. 181—196 (electronic).

[59] Stein Y. The total reducibility order of a polynomial in two variables / Y. Stein // Israel J. Math. — 1989. — Vol. 68, № 1. — P. 109—122.

[60] Stein Y. Weakly nilpotent and weakly semisimple polynomials on the plane / Y. Stein // International Mathematics Research Notices — 2000. — № 13. — P. 681—698.

[61] Strade H. Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic / H. Strade, R. Wilson // Bull. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 24, № 2. — P. 357—362.

[62] Vistoli A. The number of reducible hypersurfaces in a pencil / A. Vistoli // Invent. Math. — 1993, — Vol. 112., NUM 2. — P. 247—262.

[63] Zaks A. Dedekind k-subalgebras of $k(x)$ / Abraham Zaks // Comm. Algebra. — 1977. — Vol. 5, № 4. — P. 347—364.

[64] Zariski O. Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert / O. Zariski. // Bull. Sci. Math. (2). — 1954. — Vol . 78. — P. 155—168.