FB Mathematik
Prof. Dr. Günther Trautmann
Oleksandr Iena

SS 2007

Komplexe Analysis

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und sei $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C}^n$ eine C^1-Abbildung. Verifiziere die Formel

$$\det J(f) = \det \begin{pmatrix} D(f,z) & D(f,\bar{z}) \\ D(\bar{f},z) & D(\bar{f},\bar{z}) \end{pmatrix},$$

wo die Matrix rechts eine 2×2 Blockmatrix ist, die aus den Blöcken $D(g,u) := (\frac{\partial g_\nu}{\partial u_\mu})_{\nu,\mu}$ besteht.

Aufgabe 2: (1) Sei $G \subset \mathbb{C}^2$ ein Gebiet. Sei $f \neq 0$ eine holomorphe Funktion auf G, sodass $f(a) = 0$ für $a \in G$, $a = (a_1, a_2)$. Sei $\frac{\partial f}{\partial z_2}(a) \neq 0$. Zeige, dass offene Umgebungen $U_1(a_1),\ U_2(a_2) \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion g auf U_1 existieren mit

$$\{(z_1, z_2) \in U_1 \times U_2 |\ f(z_1, z_2) = 0\} = \{(z, g(z))|\ z \in U_1\}.$$

Hinweis: *benutze den lokalen Umkehrungssatz für die Abbildung*

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1, f(z_1, z_2)).$$

(2) Man verallgemeinere die Aussage von (1) für Gebiete $G \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ und holomorphe Abbildungen $G \xrightarrow{f} \mathbb{C}^n$ und skizziere einen Beweis davon.

Aufgabe 3: (Korollar zum Residuensatz)
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, seien f und g holomorphe Funktionen und sei γ ein nullhomotoper stückweise stetig differenzierbarer Weg in G. Es bezeichne $\mathrm{ord}_a(f)$ die Verschwindungsordnung von f in a,

$$\mathrm{ord}_a(f) := \min\{\mu \in \mathbb{N}|\ f^{(\mu)}(a) \neq 0\}.$$

Sei $N(f)$ die Menge der Nullstellen von f. Es sei vorausgesetzt, dass $N(f) \cap Spur(\gamma) = \emptyset$ und dass die Menge $N_\gamma(f)$ der Nullstellen a mit $\mathrm{ind}_\gamma(a) \neq 0$ endlich ist. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in N_\gamma(f)} g(a)\, \mathrm{ord}_a(f)\, \mathrm{ind}_\gamma(a).$$

Aufgabe 4: Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, sei $f \neq 0$ eine holomorphe Funktion auf G, sei $Z = \{z \in G|\ f(z) = 0\}$.

Man zeige:

(1) $\mathring{Z} = \emptyset$, wo $\mathring{Z}$ das Innere von Z ist;

(2) Durch jeden Punkt $a \in Z$ gibt es eine komplexe Gerade L durch a, so dass a ein isolierter Punkt von $L \cap Z$ ist.

(*Eine komplexe Gerade durch a ist definiert als das Bild einer affinen Abbildung*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}^n, z \mapsto (a_1 + \lambda_1 z, \ldots, a_n + \lambda_n z), \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0.)$$

Aufgabe 5: Sei $D = \{z \in \mathbb{C}^n | \; z_n \neq 0\}$, $n \geqslant 2$. Eine Funktion $D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ heißt beschränkt bei $A = \{z \in \mathbb{C}^n | \; z_n = 0\}$, wenn zu jedem $a \in A$ eine Umgebung $U(a) \subset \mathbb{C}^n$ existiert, so dass $f|_{U \setminus A}$ beschränkt ist. Man zeige, dass sich jede auf D holomorphe Funktion, die bei A beschränkt ist, eindeutig holomorph auf ganz $\mathbb{C}^n$ fortsetzen läßt.

Aufgabe 6: a) Sei $g(z_1, \ldots, z_{n-1})$ holomorph auf $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, $g(0, \ldots, 0) = 0$, und sei $f(z_1, \ldots, z_n) = z_n^p - g(z_1, \ldots, z_{n-1})$, $p \geqslant 1$. Zeige, dass es zu jedem $a \in \mathbb{C}^{n-1}$, $g(a) \neq 0$, eine offene Umgebung $U(a) \subset \mathbb{C}^{n-1}$ gibt, so dass die Nullsstellenfunktionen $w_1(z_1, \ldots, z_{n-1}), \ldots, w_p(z_1, \ldots, z_{n-1})$ dort paarweise verschieden und holomorph sind.

b) Sei $f(z_1, z_2) = z_2^p + \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu(z_1) z_2^{p-\nu}$ mit auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen g_ν mit $g_\nu(0) = 0$. Sei $\triangle(z_1)$ die Diskriminante des Polynoms f in z_2. ($\triangle(z_1)$ ist ein Polynom in der Kooffizienten $g_1(z_1), \ldots, g_p(z_1)$ mit der Eigenschaft, dass $f(z_1, z_2)$ nur einfache Nullstellen in z_2 hat genau dann, wenn $\triangle(z_1) \neq 0$.) Man zeige: für jedes $a \in \mathbb{C}$ mit $\triangle(a) \neq 0$ gibt es eine offene Umgebung $U(a) \subset \mathbb{C}$, so dass die Nullsstellenfunktionen $w_1(z_1, \ldots, z_{n-1}), \ldots, w_p(z_1, \ldots, z_{n-1})$ dort paarweise verschieden und holomorph sind.

Aufgabe 9′: Man zeige, dass die Abbildungen $az + b$ und $(z - b)^{-1}$ von $\hat{\mathbb{C}}$ in $\hat{\mathbb{C}}$ aus Aufgabe 9 biholomorph sind.

Aufgabe 10: (1) Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{C}$ zwei Gitter und sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Zeige, dass die Multiplikationsabbildung

$$\mathbb{C}/\Gamma_1 \xrightarrow{\cdot\alpha} \mathbb{C}/\Gamma_2, \quad [z] \mapsto [\alpha z]$$

wohldefiniert und holomorph ist.

(2) Zeige, dass die Abbildung $\cdot\alpha$ biholomorph ist genau dann, wenn $\alpha\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Aufgabe 11: Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion und sei $P \subset D$ die Polmenge von f. Man zeige, dass die Abbildung

$$\hat{f} : D \to \hat{\mathbb{C}}, \quad \hat{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \in D \setminus P \\ \infty, & \text{falls } z \in P \end{cases}$$

eine holomorphe Abbildung ist.

Aufgabe 15: Sei $C = \left\{ \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \;|\; \mathrm{rg} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \leqslant 1 \right\}$.

Man zeige, dass

1) C eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ ist;

2) die Abbildung

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{C}), \quad \langle t_0, t_1 \rangle \mapsto \langle t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3 \rangle,$$

wohldefiniert und holomorph ist;

3) Bild $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = C$ und dass $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to C$ biholomorph ist;

4) C nicht in einer projektiven Ebene liegt.

Aufgabe 16: (*Hyperflächen in* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$). Sei $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geqslant 1$. Sei $Z(f) = \{\langle x \rangle \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) | \; f(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$.

1) Man beweise die Formel (Eulerformel)

$$f = \frac{1}{d}\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

2) Zeige, dass $Z(f)$ genau dann eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ist, wenn

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\langle a\rangle) \neq 0 \quad \text{für alle } \langle a\rangle \in Z(f).$$

Aufgabe 17: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Zeige, dass

(i) die Menge $\Omega^1(X)$ der holomorphen Differentialformen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{C}-$ Vektorraum ist;
(ii) die Abbildung $d : \mathcal{O}(X) \to \Omega^1(X)$ $\mathbb{C}-$linear ist und die Leibnizregel

$$d(fg) = fdg + gdf$$

erfüllt.

Aufgabe 18: Seien (U_a, z) und (U_b, w) zwei Standard–Koordinatenumgebungen auf $\mathbb{C}/\Gamma$. Zeige, dass

(i) $dz = dw$ auf $U_a \cap U_b$ gilt;
(ii) $\Omega^1(\mathbb{C}/\Gamma)$ ein 1-dimensionaler $\mathbb{C}-$Vektorraum ist.

Aufgabe 19: Wie kann man die Aussagen der Aufgabe 18 auf $\mathbb{C}^n/\Gamma$ verallgemeinen, wo $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ ein $2n-$rangiges Gitter in $\mathbb{C}^n$ ist?

Aufgabe 20: Man zeige, dass $\Omega^1(\hat{\mathbb{C}}) = 0$.

Aufgabe 21: Seien $p_1, p_2, p_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ drei verschiedene Punkte. Zeige, dass es eine lineare Transformation

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad f(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$$

mit $f(0) = p_1$, $f(1) = p_2$, $f(\infty) = p_3$ gibt.

Aufgabe 22: Sei $\tau \in \mathbb{H}$, sei $\gamma = p\tau + q \in \Gamma_\tau = \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$, wo $p, q \in \mathbb{Z}$. Sei $e(\gamma, z) = \exp(-\pi i p^2\tau - 2\pi i p z)$.

a) Verifiziere $e(\gamma_1 + \gamma_2, z) = e(\gamma_1, \gamma_2 + z)e(\gamma_2, z)$ für $\gamma \in \Gamma_\tau$ und $z \in \mathbb{C}$.

b) Zeige, dass eine ganze (auf $\mathbb{C}$ holomorphe) Funktion f mit Periode 1, d. h. $f(z+1) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n z)$$

hat, die lokal-gleichmäßig summierbar ist.
Hinweis: man zeige, dass wegen der Perioditát von f eine auf $\mathbb{C}^*$ holomorphe Funktion g gibt mit $g(\exp(2\pi i z)) = f(z)$.

c) Zeige, dass aus $f(z+\gamma) = e(\gamma, z)f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\gamma \in \Gamma_\tau$ folgt:

$$f(z) = \lambda\theta(z) \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 23: Sei f meromorph auf $\mathbb{C}/\Gamma = X$. Man zeige, dass

(1) $\sum\limits_{x\in X} \operatorname{ord}_x(f) = 0$;

(2) $\sum\limits_{x\in X} \operatorname{ord}_x(f)x = 0$ (als Summe in $\mathbb{C}/\Gamma$).

Hinweis: Betrachte $F = f \circ \pi$ auf $\mathbb{C}$ und geeignete Integrale über ∂V_a (Notation wie in Vorlesung), wobei a so gewählt sei, dass auf ∂V_a weder Nullstellen noch Pole von F liegen.

Aufgabe 24: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Familie der meromorphen auf $\mathbb{C}$ Funktionen, die durch $f_0(z) = \frac{1}{z}$ und $f_n(z) = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ für $n \neq 0$ definiert sind.

(a) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ lokal gleichmäßig summierbar über $\mathbb{C}$ ist.
(Wähle die Ausschöpfung von $\mathbb{C}$ mit $G_n = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -n < x, y < n\}$).

(b) Zeige, dass die resultierende meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

als Hauptteile genau die Funktionen $\frac{1}{z-n}$, $n \in \mathbb{Z}$ hat.

(c) Zeige, dass f als

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right),$$

mit der lokal gleichmäßig summierbaren Familie $(g_n)_{n\geqslant 1}$, $g_n(z) = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}$ dargestellt werden kann.

(d) Zeige, dass $f(z) = \pi \cot(\pi z)$.
Hinweis: sei $g(z) = f(z) - \pi \cot(\pi z)$; beweise $g'(z) + g'(z + 1/2) = 4g'(2z)$ und verifiziere, dass $g' = 0$ und $g = 0$.

(e) Zeige, dass die Familie $(\frac{1}{z-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ nicht lokal gleichmäßig summierbar ist.