РІМАНОВІ ПОВЕРХНІ

ОЛЕКСАНДР ЄНА

Вступ

Дані нотатки є конспектом курсу лекцій, прочитаного у Люксембурзькому Університеті восени 2015 року. Курс складався з чотирнадцяти 90-хвилинних лекцій, по одній щотижня. Метою курсу було скласти в студентів перше враження про Рімановi поверхні, познайомити їх із основними поняттями, надати якомога більше простих для розуміння прикладів, а також сформулювати в студентів, за допомогою вправ після кожної лекції, вміння застосовувати набуті знання. Хоча даний курс й не супроводжувався окремим циклом практичних занять, ми вважаємо корисним, за можливості, обговорювати розв'язки вправ з кожної лекції.

Зауваження й пропозиції щодо покращення цих нотаток вітаються.

Попередні вимоги до знань. Наступне вважається відомим.

1) Голоморфні функції від однієї змінної.
2) Основи топології: топологічні простори, неперервні відображення.
3) Основи топологічних многовидів: означення.
4) Означення комплексного многовиду та підмноговиду.

Зміст

1. Лекція 1

1.1. Означення Рімановоï поверхні.

Як можна здогадатися із назви цього курсу, першим та основним означенням є означення Рімановоï поверхні.

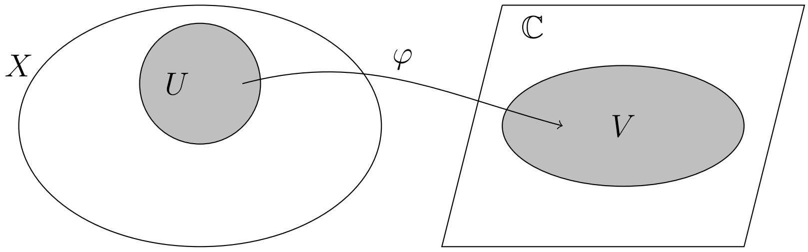
Означення 1.1. Ріманова поверхня — це зв'язний 1-вимірний комплексний многовид.

З'ясуймо тепер більш детально значення Означення 1.1.

1.2. Нагадування: деталі означення Рімановоï поверхні.

Нехай X — це 2-вимірний дійсний топологічний многовид.

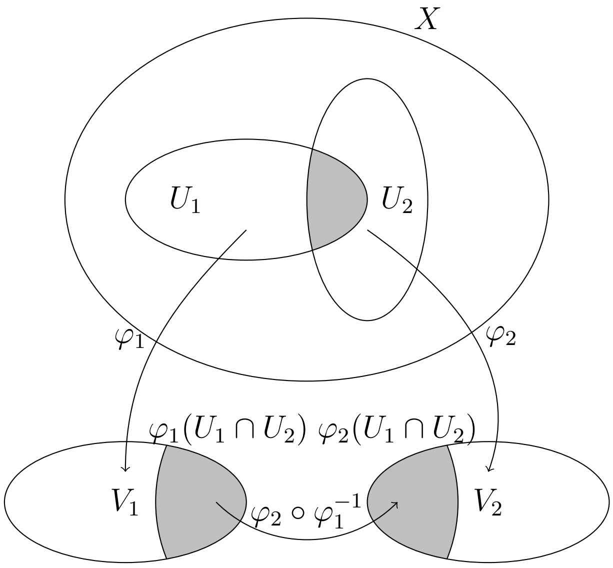
Означення 1.2. Нехай $U \subset X$ — це відкрита підмножина. Нехай $V \subset \mathbb{C}$ — це відкрита підмножина множини комплексних чисел (із стандартною Евклідовою топологією). Нехай $\varphi : U \to V$ — це гомеоморфізм. Тоді $\varphi : U \to V$ називається комплексною картою на X.



Означення 1.3. Дві комплексні карти $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ та $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ називаються голоморфно сумісними якщо

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

є голоморфним відображенням. Нехтуючи строгістю позначень, ми часто позначатимемо це відображення $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.



Вправа. Відображення $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ біголоморфне.

Означення 1.4. Система голоморфно сумісних цомплексних карт на X

$$\mathfrak{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i, i \in I\},$$

така що $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, називається комплексним атласом на X.

Означення 1.5. Два атласи $\mathfrak{A}_1$ та $\mathfrak{A}_2$ на X називаються голоморфно сумісними, якщо кожна карта з $\mathfrak{A}_1$ голоморфно сумісна із кожною картою з $\mathfrak{A}_2$.

Вправа. Голоморфна еквівалентність є відношенням еквівалентності.

Означення 1.6. Комплексна структура на X — це клас еквівалентності комплексних атласів на X.

Зауваження 1.7. Для того, щоб задати комплексну структуру на X, достатньо задати комплексний атлас на X. Тоді дві комплексні структури співпадають, якщо відповідні атласи еквівалентні.

Означення 1.8. Нехай $\mathfrak{A}$ — це комплексний атлас на X. Покладімо

$$\mathfrak{A}_{max} = \{\text{комплексні карти на } X\text{, які голоморфно сумісні з картами з } \mathfrak{A}\}.$$

Тоді $\mathfrak{A}_{max}$ — це максимальний атлас серед усіх атласів голоморфно сумісних з атласом $\mathfrak{A}$.

Тому два атласи $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{B}$ еквівалентні тоді й лише тоді, якщо $\mathfrak{A}_{max} = \mathfrak{B}_{max}$.

Означення 1.9. Ріманова поверхня — це пара (X, Σ), де X — це зв'язний 2-вимірний дійсний топологічний многовид, а Σ — комплексна структура на X.

Еквівалентно: Ріманова поверхня — це пара $(X, \mathfrak{A})$, де X — зв'язний 2-вимірний дійсний топологічний многовид, а $\mathfrak{A}$ — комплексний атлас на X.

Для тих, хто пам'ятає означення комплексного многовиду, зрозуміло, що це означення є нічим іншим, як означенням 1-вимірного комплексного многовиду.

Домовленність. Якщо (X, Σ) Ріманова поверхня, тоді "карта на X" означає карта у максимальному атласі на X, який відповідає Σ.

1.3. **Приклади Ріманових поверхонь.**

Приклад 1.10 (Найпростіший приклад)**.** $X = \mathbb{C}$, $\mathfrak{A} = \{\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C}\}$.
Щоб визначити ту саму комплексну структуру, можна взяти комплексний атлас $\mathfrak{A}' = \{U_n \xrightarrow{\text{id}} U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, де $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < n\}$.

Приклад 1.11 (Підобласті Ріманових поверхонь)**.** Довільна область $U \subset \mathbb{C}$ (відкрита зв'язна підмножина у $\mathbb{C}$), $\mathfrak{A} = \{U \xrightarrow{\text{id}} U\}$. Більш загально, нехай X — це Ріманова поверхня та нехай $U \subset X$ — це область. Тоді U — це Ріманова поверхня також. У якості атласа можна взяти обмеження на U комплексних карт на X.

Приклад 1.12 (Комплексна проективна пряма)**.** Розгляньмо

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \{(a : b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\},$$

де $(a : b)$ позначає пряму у $\mathbb{C}^2$ через точки $(0, 0)$ та (a, b). Нехай

$$U_0 = \{(a : b) \mid a \neq 0\} = \{(1 : b) \mid b \in \mathbb{C}\}, \quad U_1 = \{(a : b) \mid b \neq 0\} = \{(a : 1) \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

Нехай

$$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}, \quad (1 : b) \mapsto b,$$

та

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \quad (a:1) \mapsto a.$$

Тоді $\mathfrak{A} = \{U_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{C}, U_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}\}$ комплексний атлас на $\mathbb{P}_1$. Функція переходу $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}|_{\varphi_0(U_0 \cap U_1)}$ — це функція

$$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* = \varphi_1(U_0 \cap U_1), \quad a \mapsto \frac{1}{a}.$$

Приклад 1.13 (Ріманова сфера $\hat{\mathbb{C}}$)**.** Як множина $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$, де ∞ просто символ. Топологія визначається наступним чином. $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ відкрита тоді й лише тоді, якщо **або** $\infty \notin U$ та підмножина $U \subset \mathbb{C}$ відкрита **або ж** $\infty \in U$ та $\mathbb{C} \setminus U$ компактна підмножина у $\mathbb{C}$. Це дає компактний Гаусдорфів топологічний простір гомеоморфний до двовимірної сфери $\mathbb{S}^2$. Нехай $U_0 = \mathbb{C}$ та $U_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \mathbb{V}^* \sqcup \{\infty\}$. Нехай $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C} = \mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ та визначмо $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ за допомогою

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \neq \infty; \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

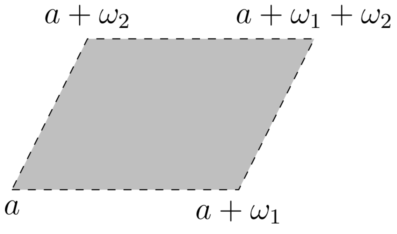
Вправа. Комплексні карти φ_0 та φ_1 голоморфно сумісні та утворюють комплексний атлас на $\hat{\mathbb{C}}$.

Дійсно, достатньо зауважити, що функція переходу $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}|_{\varphi_0(U_0 \cap U_1)}$ задана як

$$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* = \varphi_1(U_0 \cap U_1), \quad a \mapsto \frac{1}{a}.$$

Зауваження. Зауважмо, що це та сама функція переходу, як і в попередньому прикладі.

Приклад 1.14 (Комплексні тори)**.** Розгляньмо $\mathbb{C}$ як 2-вимірний векторний простір над $\mathbb{R}$. Нехай $\{\omega_1, \omega_2\}$ його базис над $\mathbb{R}$. Нехай $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ — відповідна решітка. Це підгрупа абелевої групи $\mathbb{C}$. Розгляньмо фактор-гомоморфізм $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Gamma$ та задамо на $\mathbb{C}/\Gamma$ фактор-топологію, тобто $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ є відкритою множиною тоді й лише тоді, якщо $\pi^{-1}(U)$ відкрита у $\mathbb{C}$.



Для кожного $a \in \mathbb{C}$ розгляньмо відкриту підмножину $V_a = \{a + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid t_1, t_2 \in (0,1)\}$ у $\mathbb{C}$, тобто внутрішність паралелограма з вершинами у точках a, $a + \omega_1$, $a + \omega_2$, $a + \omega_1 + \omega_2$. Множини V_a називаються стандартними паралелограмами відносно решітки Γ. Нехай $U_a := \pi(V_a)$. Зауважмо, що відображення $\pi|_{V_a} : V_a \to U_a$ бієктивне та, більш того, гомеоморфізм. Нехай $\varphi_a := (\pi|_{V_a})^{-1} : U_a \to V_a$. Це дає комплексний атлас на $\mathbb{C}/\Gamma$.

Вправа. Перевірити деталі означення комплексних торів.

Приклад 1.15. 1-вимірні комплексні підмноговиди комплексних многовидів.

1.4. **Вправи.**

Вправа 1. 1) Перевірити, що визначені у лекції комплексні карти на $\hat{\mathbb{C}}$ є голоморфно сумісними та утворюють комплексний атлас на $\hat{\mathbb{C}}$.

2) Довести, що топологічний простір $\hat{\mathbb{C}}$ гомеоморфний до комплексної проективної прямої $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Вправа 2. Нехай $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ решітка у $\mathbb{C}$.

1) В означенні комплексної структури на $\mathbb{C}/\Gamma$ доповнити деталі, яких бракує. Як виглядають функції переходу $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$?

2) Нехай S^1 позначає дійсну одновимірну сферу. Показати, що $\mathbb{C}/\Gamma$ гомеоморфний до $S^1 \times S^1$.
Підказка: *Нехай* p_1, p_2 *— це* $\mathbb{R}$*-базис* $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ *дуальний до* ω_1, ω_2. *Розгляньте відображення* $\mathbb{C}/\Gamma \to S^1 \times S^1$, $[z] \mapsto (\exp(2\pi i p_1(z)), \exp(2\pi i p_2(z)))$. *Тут* $[z]$ *позначає клас еквівалентності комплексного числа* z *у* $\mathbb{C}/\Gamma$.

Вправа 3. У цій вправі усі підмножини комплексних многовидів мають індуковану топологію.

1) Показати, що наступні топологічні підпростори у $\mathbb{C}^2$ або $\mathbb{C}^3$ є комплексними підмноговидами й, отже, Рімановими поверхнями. Описати комплексні структури на них.

$$X_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 5z_1 + 7z_2 = 0\}, \quad X_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 3z_1 - 14z_2^2 = 0\},$$
$$X_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 - 1 = 0\}, \quad X_4 = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 - z_0^2 = 0, z_2 - z_0^3 = 0\}.$$

2) Чи є наступні підмножини $\mathbb{C}^2$ комплексними підмноговидами?

$$X_5 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 - z_2^3 = 0\}, \quad X_6 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 = 0\}.$$

Чи можливо ввести на цих топологічних підпросторах у $\mathbb{C}^2$ структуру Рімановoї поверхні?
Підказка: *Розгляньте відображення* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^3, t^2)$. *Дослідіть зв'язні компоненти* $X_6 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Лекція 2

2.1. Голоморфні функції на Рімановій поверхні. Структурний пучок.

Означення 2.1 (Голоморфні функції)**.** Нехай X Ріманова поверхня. Нехай $Y \subset X$ відкрита підмножина. Тоді функція $Y \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ називається голоморфною на Y, якщо для кожної карти $\varphi : U \to V$ на X композиція $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$ є голоморфною функцією.

Нехай $\mathcal{O}_X(Y)$ позначає множину усіх голоморфних функцій на Y.

Вправа. $\mathcal{O}_X(Y)$ є $\mathbb{C}$-алгеброю.

Зауваження 2.2. Для кожної відкритої підмножини $U \subset X$ ми отримуємо $\mathbb{C}$-алгебру $\mathcal{O}_X(U)$ голоморфних функцій на U. Для довільних двох відкритих підмножин U та W у X, таких що $U \subset W$, відображення обмеження $\mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_X(U)$, $f \mapsto f|_U$ є гомоморфізмом $\mathbb{C}$-алгебр. Набір усіх цих даних позначається $\mathcal{O}_X$ й називається структурним пучком на X.

Приклад 2.3. Розгляньмо голоморфну функцію f на $\hat{\mathbb{C}}$. Оскільки $\hat{\mathbb{C}}$ компактна, то f обмежена. Отже обмеження функції f на $\mathbb{C}$, що є відкритою підмножиною у $\hat{\mathbb{C}}$, є також обмеженою функцією. Відомо, що єдиними обмеженими голоморфними функціями на $\mathbb{C}$ є константи. Тому f повинна бути сталою функцією. Це демонструє, що $\mathcal{O}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$.

2.2. Теорема Рімана про усувні особливості.

Теорема 2.4 (Теорема Рімана про усувні особливості)**.** *Нехай X Ріманова поверхня. Нехай $U \subset X$ відкрита підмножина. Нехай $a \in U$, та нехай $f \in \mathcal{O}_X(U \setminus \{a\})$ обмежена. Тоді існує едине продовження функції на a, тобто едина функція $\bar{f} \in \mathcal{O}_X(U)$, така що $\bar{f}|_{U\setminus\{a\}} = f$.*

Доведення. Нехай $\varphi : U' \to V'$ карта навколо a. Тоді $f \circ \varphi^{-1}$ голоморфна обмежена функція на $\varphi(U' \cap U) \setminus \{\varphi(a)\} \subset \mathbb{C}$. Тому існує єдина голоморфна функція F на $\varphi(U' \cap U)$, така що

$$F|_{\varphi(U'\cap U)\setminus\{\varphi(a)\}} = f \circ \varphi^{-1}.$$

Отже існує єдина голоморфна функція g на $U \cap U'$, така що $g|_{U\cap U'\setminus\{a\}} = f|_{U\cap U'\setminus\{a\}}$. Тому $\exists!\ \bar{f} \in \mathcal{O}_X(U)$ з властивістю $\bar{f}|_{U\setminus\{a\}} = f$. □

Приклад 2.5. Нехай $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z \leqslant 1|\} \subset \mathbb{C}$. Розгляньмо голоморфну функцію

$$f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\sin z}{z}.$$

оскільки f обмежена на $U \setminus \{0\}$, існує єдина голоморфна функція $\bar{f}$ на U, що співпадає із f на $U \setminus \{0\}$.

Вправа. Порахуйте розклад Тейлора функції $\bar{f}$ із Приклада 2.5 у точці 0.

2.3. Голоморфні відображення між Рімановими поверхнями.

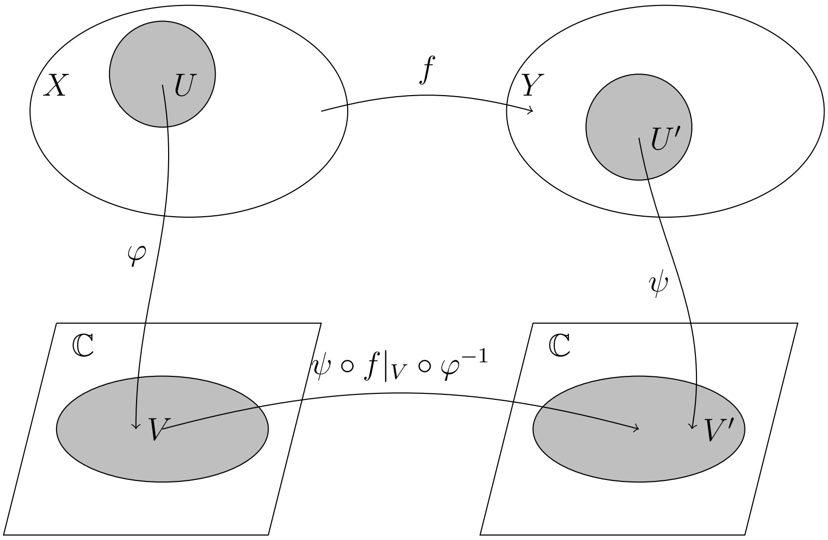
Наразі ми визначили

- Ріманові поверхні;
- для Рімановоі поверхні X пучок $\mathcal{O}_X$ голоморфних функцій на X (пучок $\mathbb{C}$-алгебр).

Іншими словами, ми визначили об'єкти, які ми вивчатимемо.

Щоб бути у змозі "порівнювати" об'єкти, зазвичай потрібні морфізми (відображення) між ними.

Означення 2.6. 1) Нехай X та Y Ріманові поверхні. Тоді відображення $f : X \to Y$ називається голоморфним, якщо для довільних карт $\varphi : U \to V$ на X та $\psi : U' \to V'$ на Y із $f(U) \subset U'$ композиція $\psi \circ f|_U \circ \varphi^{-1} : V \to V'$ є голоморфним відображенням.



2) Еквівалентно, відображення f голоморфне якщо для кожної відкритої підмножини $U \subset Y$ та для кожної функції $h \in \mathcal{O}_Y(U)$ функція $f^*h := h \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ належить до $\mathcal{O}_X(f^{-1}U)$.

Вправа. Доведіть еквівалентність тверджень у Означенні 2.6.

Домовленність. Голоморфні відображення Ріманових поверхонь і морфізми Ріманових поверхонь — це просто різні імена для того самого поняття.

Зауваження 2.7. Із означення випливає, що композиція морфізмів є також морфізмом. Тому Ріманові поверхні утворюють повну підкатегорію у категорії комплексних многовидів.

2.4. **Приклади голоморфних відображень між Рімановими поверхнями.**

Приклад 2.8 (Приклади морфізмів Ріманових поверхонь)**.** 1) Фактор-відображення $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$, де Γ решітка у $\mathbb{C}$, є голоморфним відображенням.

2) Нехай Γ та Γ' дві решітки у $\mathbb{C}$. Нехай $\alpha \in \mathbb{C}^*$ та припустімо, що $\alpha \cdot \Gamma \subset \Gamma'$. Тоді відображення

$$\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma', \quad [z] \mapsto [\alpha z],$$

коректно визначене голоморфне відображення. Більш того, це відображення є ізоморфізмом тоді й лише тоді, коли $\alpha \cdot \Gamma = \Gamma'$.

3) Відображення $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, задане за допомогою

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, z \notin \{0, \infty\}, \\ 0, z = \infty, \\ \infty, z = 0 \end{cases}$$

є голоморфним відображенням із $\hat{\mathbb{C}}$ у $\hat{\mathbb{C}}$.

4) Розгляньмо два підмноговиди у $\mathbb{C}^2$

$$X = \{(z_1, z_2) \mid z_1 z_2 = 1\} \quad \text{та} \quad Y = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = z_2^2\}.$$

Відображення

$$X \to Y, \quad (z_1, z_2) \mapsto (z_2^2, z_2)$$

є морфізмом Рімановых поверхонь.

2.5. Теорема єдиності.

Теорема 2.9 (Теорема єдиності)**.** *Нехай X, Y Рімановi поверхні, нехай $f_1, f_2 : X \to Y$ два морфізми. Нехай $A \subset X$ множина, яка містить свою граничну точку a. Якщо $f_1|_A = f_2|_A$, тоді $f_1 = f_2$.*

Доведення. Нехай $S \subset X$ — це множина точок $x \in X$, які мають відкритий окіл $U \ni x$ де функції співпадають, тобто $f_1|_U = f_2|_U$. Тоді S відкрита за означенням. Зауважамо, що $S \neq \emptyset$. Дійсно, за теоремою єдиності для $\mathbb{C}$, $a \in S$. Ми покажемо, що S замкнена. Тоді із зв'язності X випливатиме, що або $S = X$, або ж $S = \emptyset$, й отже $S = X$ та $f_1 = f_2$.

Тож нехай b гранична точка множини S. Тоді за неперервністю f_1 та f_2 ми робимо висновок, що $f_1(b) = f_2(b)$. За теоремою єдиності для $\mathbb{C}$ функції f_1 та f_2 рівні у околі b, отже $b \in S$, що й демонструє замкненість S. ☐

Приклад 2.10 (Типове застосування)**.** Нехай $X \xrightarrow{f} Y$ нестале голоморфне, нехай $y \in Y$. Тоді прообраз $f^{-1}(y)$ точки y складається з ізольованих точок, бо у протилежному випадку f має бути сталим відображенням за Теоремою 2.9. Якщо X компактна, тоді $f^{-1}(y)$ складається із скінченної кількості точок.

2.6. **Мероморфні функції.** Зауважмо, що за Означенням 2.1 та Означенням 2.6, голоморфна функція на Рімановій поверхні X — це те саме, що й голоморфне відображення $X \to \mathbb{C}$.

Ми хочемо ввести поняття мероморфної функції. Мероморфна функція на Рімановій поверхні X — це майже те саме, що й голоморфне відображення $X \to \hat{\mathbb{C}}$.

Означення 2.11 (Мероморфні функції)**.** 1) Нехай X Ріманова поверхня. Нехай $Y \subset X$ відкрита підмножина. Мероморфна функція на Y — це за означенням голоморфна функція на $Y \setminus P$, де $P \subset Y$ є підмножиною ізольованих точок, та для кожної $p \in P$ границя $\lim\limits_{x \to p} |f(x)|$ існує й дорівнює ∞.

2) Точки множини P називаються полюсами мероморфної функції f.

3) $\mathcal{M}_X(Y)$ позначає множину мероморфних функцій на $Y \subset X$.

Вправа. Нехай X Ріманова поверхня й нехай Y відкрита підмножина у X. Перевірити, що множина $\mathcal{M}_X(Y)$ мероморфних функцій на Y має природну структуру $\mathbb{C}$-алгебри та $\mathcal{O}_X(Y)$ природно включена у $\mathcal{M}_X(Y)$ як $\mathbb{C}$-підалгебра. Це також визначає структуру $\mathcal{O}_X(Y)$-модуля на $\mathcal{M}_X(Y)$.

Приклад 2.12. 1) Розгляньмо $Y = \mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ як відкриту підмножину $\hat{\mathbb{C}}$, нехай f ідентичне відображення $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$. Тоді f голоморфна функція на Y. Оскільки $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| = \lim\limits_{z\to\infty} |z| = \infty$, ми робимо висновок, що $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ може розглядатися як елемент у $\mathcal{M}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$.

2) Нехай $f \in \mathbb{C}[z]$ поліном від однієї змінної. Ми можемо розглядати f як функцію на $\mathbb{C}$. Ця функція голоморфна. Використовуючи аргументацію схожу на попередню, ми робимо висновок, що кожен многочлен від однієї змінної $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ може розглядатися як елемент у $\mathcal{M}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$.

2.7. **Вправи.**

Вправа 4. Нехай Γ — це решітка у $\mathbb{C}$. Чи можливо описати усі голоморфні функції на торі $\mathbb{C}/\Gamma$ використовуючи аргументацію аналогічну до аргументації у Прикладі 2.3, де ми показали, що $\mathcal{O}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$.

Вправа 5 (Приклади морфізмів Ріманових поверхонь)**.** Перевірте, використовуючи означення голоморфного відображення, що наступні відображення голоморфні.

1) Фактор-відображення $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$, де Γ решітка у $\mathbb{C}$, є голоморфним.

2) Нехай Γ та Γ' дві решітки у $\mathbb{C}$. Нехай $\alpha \in \mathbb{C}^*$, так що $\alpha \cdot \Gamma \subset \Gamma'$. Тоді відображення

$$\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma', \quad [z] \mapsto [\alpha z],$$

коректно визначене голоморфне відображення комплексних торів. Це відображення ізоморфізм тоді і лише тоді, коли $\alpha \cdot \Gamma = \Gamma'$.

3) Відображення $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, задане як

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, z \notin \{0, \infty\}, \\ 0, z = \infty, \\ \infty, z = 0 \end{cases}$$

є голоморфним відображенням $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

4) Розгляньмо підмноговиди X_3 та X_2 у $\mathbb{C}^2$ із Вправи 3.

$$X_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 3z_1 - 14z_2^2 = 0\}, \quad X_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 - 1 = 0\},$$

Відображення

$$X_3 \to X_2, \quad (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{14}{3} z_2^2, z_2\right)$$

є морфізмом Ріманових поверхонь.

Вправа 6. Розгляньмо 2-вимірний проективний простір

$$\mathbb{P}_2 = \{\langle z_0, z_1, z_2\rangle \mid (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\}.$$

Тут $\langle z_0, z_1, z_2\rangle$ позначає пряму через (z_0, z_1, z_2) та початок координат. Розгляньмо наступні алгебраїчні криві у $\mathbb{P}_2$:

$$X = \{\langle z_0, z_1, z_2\rangle \in \mathbb{P}_2 \mid z_0 + z_1 + z_2 = 0\}, \quad Y = \{\langle z_0, z_1, z_2\rangle \in \mathbb{P}_2 \mid z_1^2 = z_0 z_2\}.$$

Зауважте, що X та Y є комплексними підмноговидами у $\mathbb{P}_2$, отже Рімановими поверхнями. Перевірте, чи X та Y є ізоморфними одна одній, тобто чи існують голоморфні відображення Ріманових поверхонь $X \xrightarrow{f} Y$ та $Y \xrightarrow{g} X$ обернені одне до одного.
Підказка: *Порівняйте X та Y із Рімановою сферою $\hat{\mathbb{C}}$.*

Вправа 7. Показати, що множина мероморфних функцій на $\hat{\mathbb{C}}$ співпадає із множиною раціональних функцій

$$\left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \mid f, g \in \mathbb{C}[z] \text{ (поліноми від } z), g \not\equiv 0 \right\}.$$

Підказка: Наступні кроки можуть бути корисними. Нехай F, $F \not\equiv 0$, мероморфна функція на $\hat{\mathbb{C}}$.

- Зауважте, що F має скінченну кількість полюсів та нулів.
- Є дві можливості: ∞ є або полюсом F, абож ні.
- Якщо ∞ не є полюсом F, розгляньте полюси $a_1, \ldots, a_n$ функції F. Розгляньте основні частини h_ν of F at a_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, й зауважте, що $F - \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu$ є голоморфною функцією на $\hat{\mathbb{C}}$. Отже вона має бути сталою й F раціональна функція.
- Якщо ∞ полюс F, розгляньте функцію $\frac{1}{F}$ й покажіть, як вказано вище, що вона раціональна.

3. Лекція 3

3.1. Мероморфні функції як голоморфні відображення до Рімановой сфери.

Теорема 3.1. *Нехай XРіманова поверхня. Існує взаємно однозначна відповідність*

$$\mathcal{M}_X(X) \longleftrightarrow \{\text{морфізми } X \to \hat{\mathbb{C}} \text{ відмінні від тотожного відображення } z \mapsto \infty, \forall z\}.$$

Доведення. "→". Нехай $f \in \mathcal{M}_X(X)$. Нехай P відповідна множина полюсів функції f. Визначмо $\hat{f} : X \to \hat{\mathbb{C}}$ за допомогою

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z), z \notin P \\ \infty, z \in P. \end{cases}$$

Тоді $\hat{f}$ — це неперервне відображення (зауважмо, що достатньо перевірити неперервність навколо полюсів). Отже, за теоремою Рімана про усувні особливості, $\hat{f}$ голоморфна.

"←". Розгляньмо $g : X \to \hat{\mathbb{C}}$. Якщо множина $g^{-1}(\infty)$ містить свою граничну точку, то за теоремою єдиності $g(z) = \infty$ для усіх $x \in X$, що суперечить припущенню теореми. Отже $g^{-1}(\infty)$ не містить своїх граничних точок і є, таким чином, підмножиною ізольованих точок. Позначмо $f = g|_{X \setminus g^{-1}(\infty)} : X \setminus g^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$. Це голоморфна функція на $X \setminus g^{-1}(\infty)$. Для кожного $p \in g^{-1}(\infty)$ має місце $\lim\limits_{z \to p} |f(z)| = \infty$. Це означає $f \in \mathcal{M}_X(X)$.

Сконструйовані відображення є оберненими одне до одного. □

Наслідок 3.2. *Мероморфні функції відмінні від нуля мають лише ізольовані нулі й полюси.*

Доведення. Зауважмо, що полюси мероморфної функції ізольювані за означенням.

Припустімо, що a — це неізольований нуль мероморфної функції $f \in \mathcal{M}_X(X)$, тобто існує послідовність a_i із $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = a$, така що $f(a_i) = 0$, $f(a) = 0$. Тоді за теоремою єдиності $\hat{f} = 0$ як морфізм $X \to \hat{\mathbb{C}}$. Отже $f = 0$. □

Наслідок 3.3. *Нехай X Ріманова поверхня, тоді $\mathcal{M}_X(X)$ поле.*

Доведення. Якщо $f \in \mathcal{M}_X(X)$, $f \neq 0$, тоді $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{M}_X(X)$ також, оскільки нулі f стають полюсами $\dfrac{1}{f}$. □

Приклад 3.4. Як зауважено у Прикладі 2.12, поліноми від однієї змінної можуть розглядатися як мероморфні функції на $\hat{\mathbb{C}}$. Із попереднього Наслідку випливає, що кожна раціональна функція від однієї змінної $\frac{f(z)}{g(z)}$, $f, g \in \mathbb{C}[z]$, $g \not\equiv 0$, може розглядатися як мероморфна функція на $\hat{\mathbb{C}}$. Тому поле раціональних функцій від однієї змінної

$$\mathbb{C}(z) := \left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \mid f, g \in \mathbb{C}[z] \text{ (поліноми від } z), g \not\equiv 0 \right\}$$

є підполем у $\mathcal{M}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$.

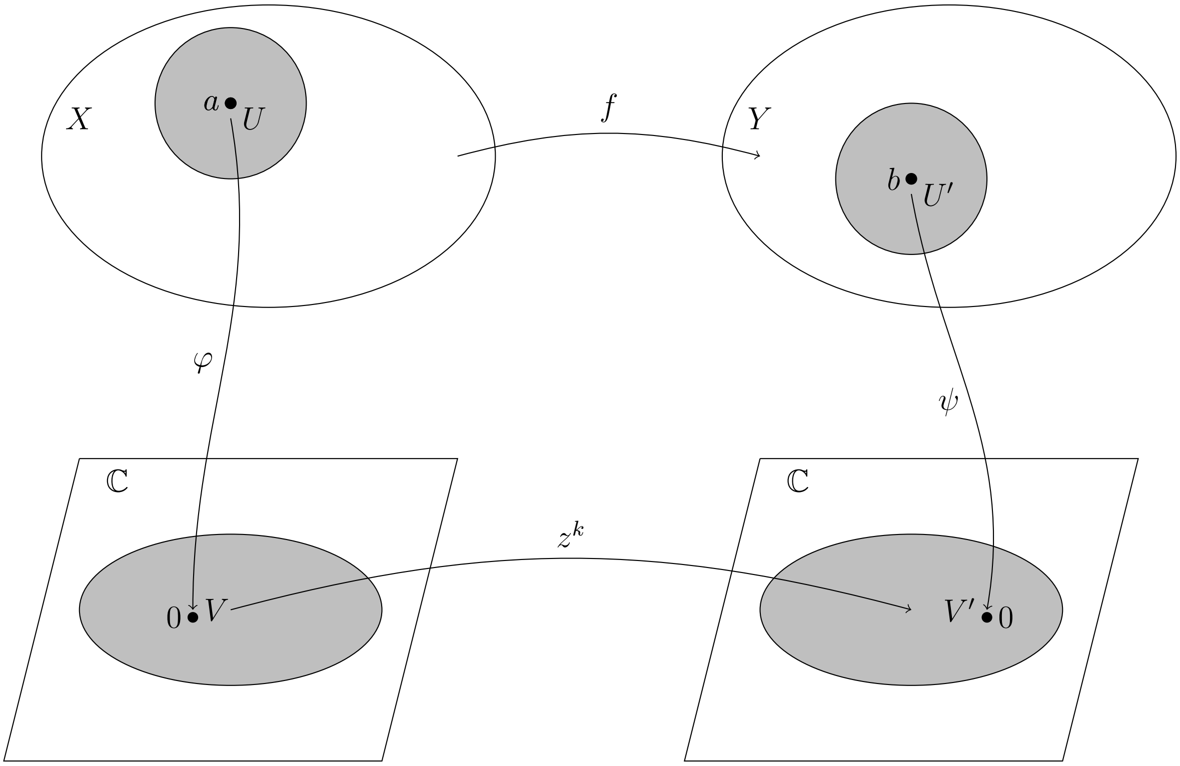
Вправа. Показати, що кожна мероморфна функція на $\hat{\mathbb{C}}$ раціональна, тобто $\mathcal{M}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$ співпадає із $\mathbb{C}(z)$.

3.2. **Локальна поведінка голоморфних відображень Рімановиx поверхонь.** Дослідімо локальну поведінку голоморфних відображень Рімановиx поверхонь.

Теорема 3.5 (Локальна поведінка голоморфних відображень)**.** *Нехай X, Y Рімановi поверхні. Нехай $f : X \to Y$ голоморфне нестале відображення. Нехай $a \in X$, $b := f(a) \in Y$. Тоді існує ціле число $k \geqslant 1$, таке що локально навколо a морфізм f виглядає як*

$$z \mapsto z^k,$$

тобто існує карта $U \xrightarrow{\varphi} V$, $a \in U$, $\varphi(a) = 0$, та карта $U' \xrightarrow{\psi} V'$, $b \in U'$, $\psi(b) = 0$, такі що $f(U) \subset U'$ та $\psi \circ f|_U \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$.



Доведення. Існує карта $\psi : U' \to V'$ навколо b така, що $\psi(b) = 0$. Тоді $f^{-1}(U')$ відкрита й містить a.

Існує карта навколо a, що відображає a у 0. Перетинаючи із $f^{-1}(U')$, ми отримуємо карту $\widetilde{U} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{V}$, таку що $f(\widetilde{U}) \subset U'$ та $\widetilde{\varphi}(a) = 0$.

Розгляньмо $\widetilde{F} := \psi f \widetilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{V} \to V'$. Оскільки $\widetilde{F}(0) = 0$, можемо представити $\widetilde{F}$ як $\widetilde{F}(z) = z^k \cdot \widetilde{G}(z)$, $\widetilde{G}(z) \neq 0$ у околі W навколо 0. Оскільки $\widetilde{G}(0) \neq 0$, зменшуючи W за необхідності, ми можемо припустити, що існує голоморфна функція H на W, така що $H^k(z) = \widetilde{G}(z)$. Дійсно, зменшуючи W за необхідності, можемо припустити, що існує гілка комплексного логарифму визначена навколо $\widetilde{G}(W)$. Тоді $H(z) := \exp(\frac{1}{k} \ln \widetilde{G}(z))$ має шукану властивість.

Ми отримуємо $\widetilde{F}(z) = z^k \cdot H^k(z) = (zH(z))^k$. Розгляньмо $\xi : W \to V'$, $z \mapsto zH(z)$. Це біголоморфне відображення між W (можливо, після зменшення W) та околом точки 0 у V'. Розгляньмо $\varphi : \widetilde{\varphi}^{-1}(W) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} W \xrightarrow{\xi} V'$. Тоді $\psi f \varphi^{-1}(z) = \psi f \widetilde{\varphi}^{-1} \xi^{-1}(z) = \widetilde{F}(\xi^{-1}(z)) = (\xi^{-1}(z) H(\xi^{-1}(z)))^k = (\xi(\xi^{-1}(z)))^k = z^k$, що й доводить теорему. ☐

Означення 3.6. Число k із попередньої теореми однозначно визначене для даного голоморфного відображення f та даної точки $a \in X$. Це число називається кратністю f у точці a й позначатиметься $\operatorname{mult}_a f$.

Вправа. Доведіть, що $\operatorname{mult}_a f$ коректно визначене.

Зауваження 3.7 (Обчислення $\operatorname{mult}_a f$)**.** Зауважмо, що для того, щоб обчислити кратність голоморфного відображення у точці, достатньо лише повторити першу частину доведення Теореми 3.5 та знайти розклад $\widetilde{F}(z) = z^k \widetilde{G}(z)$, $\widetilde{G}(0) \neq 0$.

Зауваження 3.8 (Геометричне значення $\operatorname{mult}_a f$)**.** У кожному околі U_0 точки a існує окіл $U \ni a$ та окіл $W \ni b$, $b = f(a)$, такі, що для кожного $y \in W \setminus \{b\}$

$$\# f^{-1}(y) \cap U = k,$$

тобто U містить рівно k прообразів точки y.

Приклад 3.9. 1) Нехай f ідентичне відображення $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Тоді $\operatorname{mult}_a f = 1$ для кожного $a \in \hat{\mathbb{C}}$, бо f бієктивне. Аналогічно, оскільки $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{g} \hat{\mathbb{C}}$, $g(z) = \frac{1}{z}$, бієктивне, ми отримуємо $\operatorname{mult}_a f = 1$ для кожного $a \in \hat{\mathbb{C}}$.

2) Нехай $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \hat{\mathbb{C}}$ задана як $f(z) = \frac{1}{z^3}$. Тоді $\operatorname{mult}_0 f = 3$ та $\operatorname{mult}_i f = 1$.

Вправа. Нехай $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ многочлен степеня k. Це дає голоморфне відображення

$$\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty. \end{cases}$$

Показати, що $\hat{f}$ має кратність k у точці ∞. Яка кратність $\hat{f}$ у точці 0?

3.3. **Вправи.**

Вправа 8. Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$. Тоді мероморфна функція $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ називається подвійно періодичною (або еліптичною) відносно Γ якщо $f(z) = f(z+\gamma)$ для усіх $z \in \mathbb{C}$ та для усіх $\gamma \in \Gamma$.

1) Показати, що існує взаємно однозначна відповідність між еліптичними функціями на $\mathbb{C}$ відносно Γ та мероморфними функціями на $\mathbb{C}/\Gamma$.

2) Показати, що існують лише сталі голоморфні подвійно періодичні функції.

Вправа 9. Нехай $X \xrightarrow{f} Y$ нестала голоморфна функція Ріманових поверхонь й нехай $a \in X$. Показати, що кратність f у a однозначно визначена, тобто не залежить від вибору локальних карт.
Підказка: *Зауважмо, що* $k = \operatorname{mult}_a f$ *може розглядатися як найменше* k*, таке що* k*-та похідна функції* $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *не дорівнює нулю у точці* 0*, де* φ *карта навколо* a *та* ψ *карта навколо* $b = f(a)$*.*

Вправа 10. Нехай $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ многочлен степеня k. Це дає голоморфне відображення $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $\hat{f}(\infty) = \infty$. Показати, що $\hat{f}$ має кратність k у ∞. Яка кратність $\hat{f}$ у точці 0?

Вправа 11. 1) Розгляньмо голоморфне відображення $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^k$, де k додатнє ціле число. Обчислити $\operatorname{mult}_a f$ для довільної точки $a \in \mathbb{C}$.

2) Розгляньмо голоморфне відображення $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (z-1)^3(z-2)^7$. Обчислити $\operatorname{mult}_a f$ для довільного $a \in \mathbb{C}$.

Вправа 12. Нехай $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \hat{\mathbb{C}}$ голоморфне відображення задане як

$$f(z) = \frac{(z-3)^3}{(z+1)(z-2)^2}.$$

Обчислити $\operatorname{mult}_3 f$, $\operatorname{mult}_{-1} f$, $\operatorname{mult}_2 f$, $\operatorname{mult}_1 f$.

4. Лекція 4

4.1. Деякі наслідки (з локальної поведінки морфізмів Рімановых поверхонь).

Наслідок 4.1. *Нестале голоморфне відображення Рімановых поверхонь* $f : X \to Y$ *відкрите.*

Доведення. Локально відображення f є відображенням $z \mapsto z^k$, яке відкрите. Оскільки бути відкритим — це локальна властивість, то f відкрите. ☐

Наслідок 4.2. *Нехай* $f : X \to Y$ *ін'єктивний морфізм Рімановых поверхонь. Тоді* $f : X \to f(X)$ *біголоморфне.*

Доведення. З ін'єктивності випливає, що f локально є відображенням $z \mapsto z$. Тоді обернене до f відображення локально є також відображенням $z \mapsto z$ і отже є голоморфним. ☐

Наслідок 4.3 (Принцип максимума)**.** *Нехай* $f \in \mathcal{O}_X(X)$ *нестала голоморфна функція. Тоді* $|f|$ *не має максимуму на* X.

Доведення. Припустімо, що $|f|$ має максимум на X. Тоді існує $a \in X$, таке що

$$|f(a)| = \sup_{x \in X} |f(x)| =: M.$$

Розгляньмо множину $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant M\} \subset \mathbb{C}$. K компактна. Тоді $f(X) \subset K$, зокрема $f(a) \in K$. Отже $f(a) \in \partial K$ (границя K). Оскільки $f(X)$ відкрита, $f(a)$ має міститися у K разом із деяким околом. Це суперечність. Отже наше припущення було невірним й $|f|$ не має максимума на X. ☐

Теорема 4.4. *Нехай* $X \xrightarrow{f} Y$ *несталий морфізм Рімановых поверхонь. Нехай* X *компактна. Тоді* f *сюр'єктивне і* Y *компактна також.*

Доведення. Оскільки множина $f(X)$ відкрита й компактна, вона відкрита й замкнена. Тому $f(X) = Y$, оскільки Y зв'язна. ☐

Означення 4.5 (Еліптичні функції[1])**.** Нехай Γ — це решітка у $\mathbb{C}$. Тоді мероморфна функція $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ називається подвійно періодичною (або еліптичною) відносно Γ, якщо $f(z) = f(z + \gamma)$ для усіх $z \in \mathbb{C}$ та для усіх $\gamma \in \Gamma$.

Вправа. Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$. Показати, що кожна нестала еліптична функція відносно Γ набуває кожного значення $b \in \hat{\mathbb{C}}$.

Наслідок 4.6. *Нехай* X *компактна Ріманова поверхня. Тоді* $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$.

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{O}_X(X)$ й розгляньмо її як голоморфне відображення $X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$. Якщо f нестала, тоді $\mathbb{C}$ має бути компактом, що є невірним. Отже f стала функція. ☐

Зауваження 4.7. Як ми бачили у Вправі 7 з цього випливає, що кожна мероморфна функція на $\hat{\mathbb{C}}$ раціональна.

---

[1] див. Вправу 8

Факт. *Існує взаємно однозначна відповідність між еліптичними функціями на $\mathbb{C}$ відносно Γ та мероморфними функціями на $\mathbb{C}/\Gamma$. Зокрема, існують лише сталі подвійно періодичні мероморфні функції на $\mathbb{C}$.*

Доведення. Кожна еліптична функція $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ єдиним чином факторизується через канонічну проекцію $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Gamma$ й отже визначає голоморфне відображення $\mathbb{C}/\Gamma \to \hat{\mathbb{C}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \hat{\mathbb{C}} \\
& \mathbb{C}/\Gamma \arrow[ur, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Кожне голоморфне відображення $\hat{f} : \mathbb{C}/\Gamma \to \hat{\mathbb{C}}$ визначає $f = \hat{f} \circ \pi$.

Це дає шукану взаємно однозначну відповідність. ☐

Вправа. Спробуйте винайти нетривіальну еліптичну функцію відносно деякої решітки.

4.2. **Фундаментальна група.**

Означення 4.8. Нехай X топологічний простір. Тоді шлях у X — це неперервне відображення $\gamma : [0,1] \to X$. Точка $\gamma(0)$ називається початковою точкою γ, точка $\gamma(1)$ називається кінцевою точкою γ.

Якщо $\gamma(0) = \gamma(1)$, тоді γ називається замкненим шляхом.

Означення 4.9. Топологічний простір X називається лінійно-зв'язним якщо кожні дві точки $a, b \in X$ можуть бути поєднані шляхом.

Нагадування 4.10. З лінійна зв'язності випливає зв'язність.

Вправа. Ріманові поверхні лінійно зв'язні.
Підказка: *Для точки x_0 Рімановоï поверхні X розгляньте множину S усіх точок, які можуть бути поєднані із x_0 за допомогою шляха. Покажіть, що множина S непорожня, замкнена та відкрита.*

Означення 4.11. Два шляхи γ, δ із a до b називаються гомотопними, або гомотопно еквівалентними, якщо існує неперервне відображення

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X,$$

таке що

$$H(t,0) = \gamma(t), \quad H(t,1) = \delta(t) \quad \text{for all } t \in [0,1]$$
$$H(0,s) = a, \quad H(1,s) = b \quad \text{for all } s \in [0,1].$$

Ми позначатимемо $\gamma \sim \delta$ якщо γ та δ гомотопні.

Факт. *Гомотопність це відношення еквівалентності на множині усіх шляхів із a до b.*

Означення 4.12 (Композиція)**.** Нехай X топологічний простір. Нехай γ шлях із a до b. Нехай δ шлях із b до c. Визначмо

$$(\gamma \cdot \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Означення 4.13 (Обернений шлях)**.** Нехай X топологічний шлях. Нехай γ шлях із a до b. Визначмо

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t), \quad t \in [0,1].$$

Факт. *Композиція шляхів та обернений шлях сумісні із гомотопною еквівалентністю. Іншими словами, якщо $\gamma \sim \gamma'$, $\delta \sim \delta'$ та якщо композиції $\gamma \cdot \delta$, $\gamma' \cdot \delta'$ визначені, тоді*

$$\gamma \cdot \delta \sim \gamma' \cdot \delta', \quad \textit{and} \quad \gamma^{-1} \sim \gamma'^{-1}.$$

Означення-Теорема 4.14 (Фундаментальна група)**.** Нехай $x_0 \in X$. Нехай $\pi_1(X, x_0)$ позначає множину класів гомотопності замкнених шляхів із x_0 до x_0. Нехай $[\gamma]$ позначає клас гомотопності шляху γ. Нехай $[x_0]$ позначає клас гомотопності сталого шляху

$$[0,1] \to X, \quad t \mapsto x_0.$$

Тоді $\pi_1(X, x_0)$ група відносно множення

$$[\gamma] \cdot [\delta] := [\gamma \cdot \delta],$$

сталий шлях $[x_0]$ є нейтральним елементом відносно цього множення, для класу $[\gamma]$ його обернений даний класом $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$.

$\pi_1(X, x_0)$ називається фундаментальною групою X відносно базисної точки x_0.

Доведення. Вправа. ☐

Факт. *Якщо $a, b \in X$ поєднані шляхом $\delta : [0,1] \to X$, тоді відображення*

$$\pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b), \quad [\gamma] \mapsto [\delta^{-1} \cdot \gamma \cdot \delta]$$

є ізоморфізмом груп.

Доведення. Вправа. ☐

Зауваження 4.15. Зауважмо, що цей ізоморфізм залежить від δ. Він не залежить від δ тоді й лише тоді, якщо $\pi_1(X, a)$ є абелевою групою.

Означення 4.16. Лінійно зв'язний топологічний простір X називається однозв'язним якщо фундаментальна група $\pi_1(X, a)$ тривіальна для якоїсь (еквівалентно: для кожної) точки $a \in X$. Нехтуючи строгістю позначень ми писатимемо $\pi_1(X, a) = 0$, щоб сказати що $\pi_1(X, a)$ тривіальна.

Зауваження 4.17. 1) Фундаментальна група функторіальна. Це означає, що кожне неперервне відображення $f : X \to Y$ індукує гомоморфізм груп

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)), \quad [\gamma] \mapsto f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma],$$

так що для двох неперервних відображень

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

має місце

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

2) Зокрема, з цього випливає, що гомеоморфні лінійно-зв'язні топологічні простори мають ізоморфні фундаментальні групи. Тому $\pi_1(X, a)$ (щоб бути точнішим, її клас ізоморфізму) є топологічним інваріантом.

4.3. **Класифікація компактних Ріманових поверхонь з точністю до гомеоморфізму.**

Факт. *Негомеоморфні компактні Ріманові поверхні мають неізоморфні фундаментальні групи.*

Пояснення. Компактні Ріманові поверхні є орієнтовними компактними 2-вимірними дійсними многовидами, тобто поверхнями. Останні вичерпно прокласифіковані з точністю до гомеоморфізму.

А саме, для кожного невід'ємного цілого числа p існує один й лише один клас гомеоморфності.

Для $p = 0$ це клас гомеоморфності сфери $X \cong \hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$, відповідна фундаментальна група $\pi_1(X)$ тривіальна.

Для $p \geqslant 1$ фундаментальна група X задається твірними й співвідношеннями

$$\pi_1(X) \cong \langle a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p \mid \prod_{i=1}^{p} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1 \rangle.$$

Ми обговоримо це більш детально у наступній лекції. □

4.4. **Вправи.**

Вправа 13. Розгляньмо наступну алгебраїчну криву у $\mathbb{P}_2$.

$$C = \{\langle x_0, x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{P}_2 \mid x_0 x_2^2 - x_1^3 + x_0^3 = 0\}.$$

0) Зауважте, що C комплексний підмноговид у $\mathbb{P}_2$ і отже Ріманова поверхня.

1) Розглянути відкриту підмножину $C(x_0) = \{\langle x_0, x_1, x_2 \rangle \in C \mid x_0 \neq 0\}$ у C та дві голоморфні функції $X = \frac{x_1}{x_0}$ та $Y = \frac{x_2}{x_0}$ на $C(x_0)$. Показати, що X та Y мероморфні функції на C. Знайдіть їхні нулі й полюси.

2) Розглянути X та Y як голоморфні відображення у $\hat{\mathbb{C}}$ і обчислити їхні кратності у їхніх нулях та полюсах.

Вправа 14. 1) Нехай a та b дві точки у топологічному просторі X. Перевірити, що відношення гомотопності є відношенням еквівалентності на множині усіх шляхів із a до b.

2) Перевірте технічні деталі у означенні фундаментальної групи даному у лекції. Можете використати підручник з топології, наприклад [8].

Вправа 15. 0) Нехай X відкритий диск із радіусом 1 у $\mathbb{C}$ з центром о початку координат. Показати, що $\pi_1(X, 0) = 0$.

1) Показати, що фундаментальна група $\hat{\mathbb{C}}$ тривіальна. Деякі технічні деталі можна знайти у [8].

2) Обчислити фундаментальну групу комплексного тора $\mathbb{C}/\Gamma$. Використати, що $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ та той факт, що фундаментальна група добутку лінійно зв'язних топологічних просторів X та Y природно ізоморфна до добутку відповідних фундаментальних груп:

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Вправа 16. Так звана теорема про уніформізацію стверджує, що, з точністю до ізоморфізму, існує лише 3 однозв'язних Ріманових поверхні, а саме $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ та відкритий диск у $\mathbb{C}$.

Нехай $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ верхня напівплощина із індукованою комплексною структурою. Показати, що $\mathbb{H}$ однозв'язна й знайти до якого класу ізоморфізму вона належить.

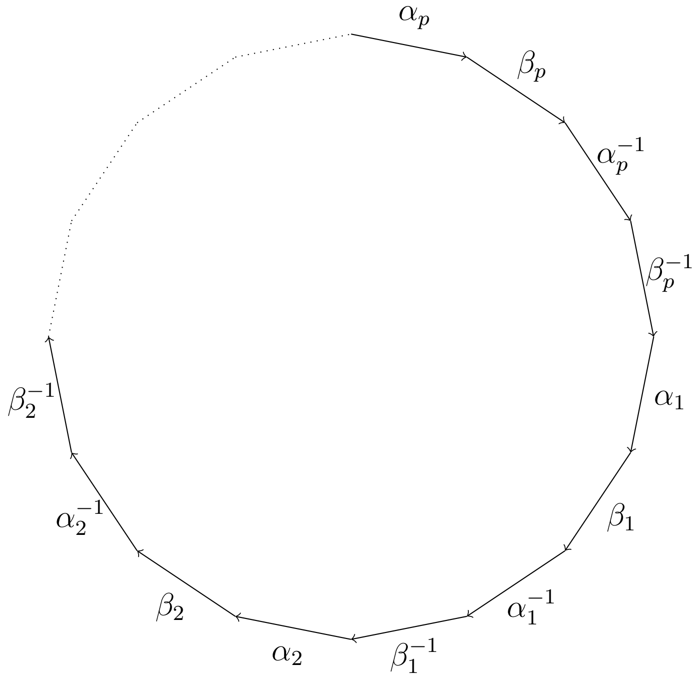
Підказка: *Корисною може виявитися мероморфна функція* $\frac{z-i}{iz-1}$ *на* $\mathbb{C}$.

5. Лекція 5

5.1. **Компактні Ріманові поверхні як склейки правильних многокутників.** У попередній лекції ми згадали, що для кожного невід'ємного цілого числа p існує один й лише один клас гомеоморфності 2-вимірних дійсних орієнтовних компактних многовидів.

Пояснення. Як вже згадано, для $p = 0$ це клас гомеоморфності сфери $X \cong \hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$, відповідна фундаментальна група $\pi_1(X)$ тривіальна.

Для $p \geqslant 1$ представник X відповідного класу гомеоморфності отримується як результат склейки правильного $4p$-кутника вздовж його сторін, як показано на наступному рисунку.



Кожна сторона може розглядатися як шлях на площині. Початкова та кінцева точка показані стрілками. Для кожного i ми склеюємо разом, обертаючи орієнтацію, сторону α_i із стороною α_i^{-1} та сторону β_i із стороною β_i^{-1}.

Це означає, що початкова точка сторони із міткою α_i або β_i склеюється із кінцевою точкою сторони із міткою α_i^{-1} або β_i^{-1} відповідно.

Аналогічно, кінцева точка сторони з міткою α_i або β_i склеюється із початковою точкою сторони з міткою α_i^{-1} або β_i^{-1} відповідно.

Образи шляхів $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p$ у склейці X позначаються, нехтуючи строгістю позначень, за допомогою тих самих символів. Тоді шлях α_i^{-1} дійсно є оберненим шляхом до шляху α_i, а шлях β_i^{-1} є оберненим шляхом до β_i. Зауважмо, що кожен з цих шляхів стає замкненим шляхом з точки, що отримується склейкою усіх вершин $4p$-кутника.

Фундаментальна група X породжується твірними

$$\{[\alpha_1], \dots, [\alpha_p], [\beta_1], \dots, [\beta_p]\}$$

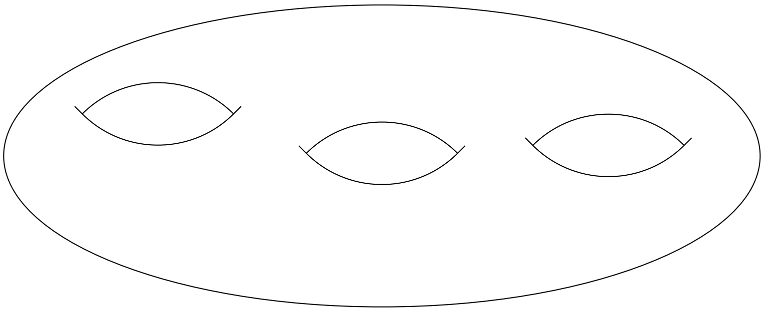
із єдиним співвідношенням

$$\prod_i [\alpha_i][\beta_i][\alpha_i]^{-1}[\beta_i]^{-1} = 1,$$

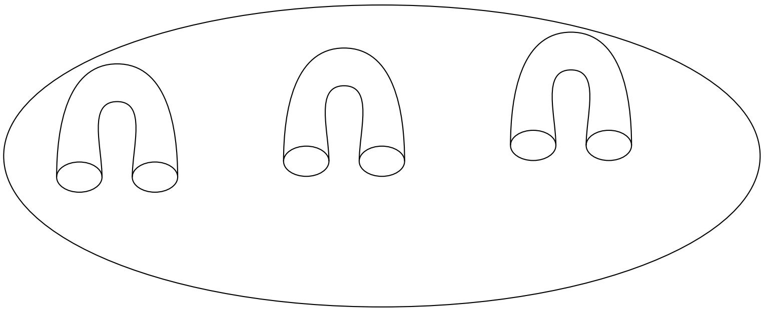
тобто

$$\pi_1(X) \cong \langle a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p \mid \prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1 \rangle.$$

У цьому випадку X гомеоморфне до повехні бублика із p дірками



або ж, що є еквівалентним, до сфери із p ручками.



Співвідношення поміж твірними, згадане вище, можна зрозуміти наступним чином. Нехай P позначає правильний $4p$-кутник на площині, згаданий вище. Розгляньмо замкнений шлях

$$\gamma = \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \beta_1^{-1} \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \beta_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_p \cdot \beta_p \cdot \alpha_p^{-1} \cdot \beta_p^{-1}$$

Цей шлях стягуваний у P, тобто гомотопний до сталого шляху.

Нехай X топологічний простір отриманий у результаті склейки сторін багатокутника P, як пояснено вище. Розгляньмо відповідне фактор-відображення $P \to X$, яке неперервне за означенням фактор-топології. Компонуючи гомотопію, що стягує γ у точку, із фактор-відображенням $P \to X$, ми отримуємо гомотопію, яка стягує у точку образ γ у X. Це й дає співвідношення $\prod_i [\alpha_i][\beta_i][\alpha_i]^{-1}[\beta_i]^{-1} = 1$. □

Вправа. Обчисліть $\pi_1(\hat{\mathbb{C}})$, $\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma)$, де $\Gamma \subset \mathbb{C}$ решітка.

Означення 5.1. Нехай $f : X \to Y$ нестале голоморфне відображення. Тоді $x \in X$ називається точкою розгалудження відображення f, якщо не існує околу U точки x, такого що відображення обмеження $f|_U$ ін'єктивне.

Відображення f називається нерозгалудженим, якщо воно не має точок розгалудження.

Зауваження 5.2. Точки розгалудження — це точки із кратностями $\operatorname{mult}_x f > 1$. Це випливає безпосередньо із Теореми 3.5.

Наслідок 5.3. *Нестале голоморфне відображення Рімановиx поверхнонь $f : X \to Y$ нерозгалуджене тоді і лише тоді, коли воно є локальним гомеоморфізмом.*

Приклад 5.4. 1) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$. Тут 0 єдина точка розгалудження.

2) Голоморфне відображення $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ нерозгалуджене.

3) Стандартна проекція $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ нерозгалуджена для кожної решітки $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

5.2. **Степінь голоморфного відображення.**

Теорема 5.5. *Нехай $f : X \to Y$ нестале голоморфне відображення компактних Рімановиx поверхонь. Тоді для кожного $y \in Y$ його прообраз $f^{-1}(y)$ є скінченною множиною, та число*

$$d_y(f) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{mult}_x f$$

не залежить від y.

Наслідок 5.6. *Якщо $Y = \hat{\mathbb{C}}$, тоді $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ — це мероморфна функція, й число нулів f дорівнює числу полюсів f (порахованих разом із кратністю).*

Означення 5.7. У позначеннях Теореми 5.5 число $d(f) := d_y(f)$ (для деякого/кожного $y \in X$) називається степенем $f : X \to Y$.

Приклад 5.8. Розгляньмо мероморфну функцію $f(z) = \frac{(z-2)}{(z-3)^2(z-7)^3}$ на $\hat{\mathbb{C}}$. Обчислімо число нулів цієї функції разом з кратностями і, таким чином, степінь відповідного голоморфного відображення $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathbb{C}}$.

Зауважмо, що $\hat{f}^{-1}(0) = \{2, \infty\}$. Оскільки

$$f(z) = (z-2) \cdot \frac{1}{(z-3)^2(z-7)^3}$$

і оскільки $\dfrac{1}{(z-3)^2(z-7)^3}$ відмінна від нуля у точці $z = 2$, ми отримуємо

$$\operatorname{mult}_2 \hat{f} = 1.$$

Оскільки

$$f(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^4 \cdot \frac{z^4(z-2)}{(z-3)^2(z-7)^3}$$

й $\frac{z^4(z-2)}{(z-3)^2(z-7)^3}$ не нуль у точці ∞, ми отримуємо

$$\operatorname{mult}_\infty \hat{f} = 4.$$

Отже $d_0(\hat{f}) = \operatorname{mult}_2 \hat{f} + \operatorname{mult}_\infty \hat{f} = 1 + 4 = 5$ і тому $d(\hat{f}) = 5$.

Зауважмо, що множина полюсів f — це $\{3, 7\}$. Оскільки $\operatorname{mult}_3(\hat{f}) = 2$ й $\operatorname{mult}_7(\hat{f}) = 3$, ми маємо

$$\operatorname{mult}_3(\hat{f}) + \operatorname{mult}_7(\hat{f}) = 2 + 3 = 5 = 1 + 4 = \operatorname{mult}_2(\hat{f}) + \operatorname{mult}_\infty(\hat{f}),$$

що й ілюструє твердження Наслідка 5.6.

Наслідок 5.9. *Нехай $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ нестала мероморфна функція на торі. Тоді f має щонайменше 2 полюси (порахованих із кратністю).*

Доведення. Припустімо, що f має менше ніж 2 полюси.

1) Якщо f не має полюсів взагалі, тоді f голоморфна функція і отже, за Наслідком 4.6, f стала, що є суперечністю.
2) Якщо f має лише один полюс, тоді для відповідного голоморфного відображення $X \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathbb{C}}$ точка $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ має лише один прообраз. Тому для довільної точки $p \in \hat{\mathbb{C}}$
$$\#\hat{f}^{-1}(p) = \#\hat{f}^{-1}(\infty) = 1,$$
що означає, що $\hat{f} : X \to \hat{\mathbb{C}}$ бієкція. Отже $\hat{f}$ ізоморфізм Ріманових поверхонь (див. Наслідок 4.2 та Теорема 4.4). Зокрема X та $\hat{\mathbb{C}}$ гомеоморфні як топологічні простори, що є відповідає дійсності, оскільки, наприклад, вони мають неізоморфні фундаментальні групи.

Це завершує доведення. □

Зауваження 5.10. Насправді, ми довели навіть більше, а саме, на кожній компактній Рімановій поверхні, що неізоморфна до $\hat{\mathbb{C}}$, несталі мероморфні функції мають мати щонайменше 2 полюси.

5.3. **Вправи.**

Вправа 17. Обчисліть степені $d(\hat{f})$, $d(\hat{g})$ голоморфних відображень $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, що відповідають наступним мероморфним функціям на $\hat{\mathbb{C}}$:
$$f(z) = \frac{(z-17)^2}{z^{13}+2}, \quad g(z) = \frac{(z-1)^3}{z^2+11}.$$

Вправа 18. Як ми вже знаємо, кожна мероморфна функція f на $\hat{\mathbb{C}}$ раціональна, тобто
$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z], \quad Q(z) \neq 0.$$
Показати, що степінь відповідного голоморфного відображення $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ дорівнює
$$\max\{\deg P, \deg Q\}.$$

Вправа 19. Знайти усі точки розгалудження морфізма $\hat{g}$ із Вправи 17.

Вправа 20. 1) Нехай a комплексне число. Нехай f мероморфна функція на $\hat{\mathbb{C}}$ із єдиним полюсом кратності 1 у a. Показати, що
$$f(z) = \mu + \frac{\lambda}{z-a}$$
для деякого ненульового комплексного числа λ та деякого $\mu \in \mathbb{C}$.

2) Розгляньте мероморфну функцію $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$ on $\mathbb{C}$. Знайдіть усі нулі й полюси f та відповідні кратності. Порівняйте ваші результати із твердженнями з лекції.

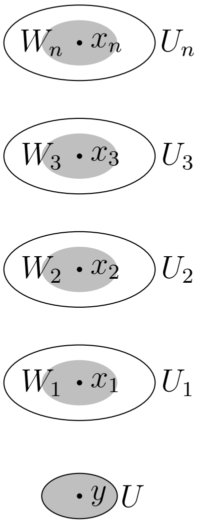
6. Лекція 6

6.1. **Степінь голоморфного відображення: деталі.**

Доведення Теореми 5.5. Зауважмо спочатку, що $f^{-1}(y)$ має бути дискретною множиною за Теоремою 2.9. Оскільки X компактна, то за тією ж теоремою $f^{-1}(y)$ має бути скінченною множиною. Розгляньмо тепер функцію

$$Y \to \mathbb{Z}, \quad y \mapsto d_y(f).$$

Ми покажемо, що ця функція локально стала. Оскільки Y зв'язна, з цього випливатиме, що $d_y(f)$ стала функція.



Нехай $y \in Y$. Нехай $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Позначмо $m_i = \operatorname{mult}_{x_i} f$. Для кожного $i = 1, \ldots, n$, нехай U_i буде відкритим околом x_i, таким що $f|_{U_i} : U_i \to f(U_i)$ має форму $z \mapsto z^{m_i}$ (у підходящих картах). Зменшуючи U_i, ми можемо припустити, що $U_i \cap U_j = \emptyset$ для $i \neq j$.

Оскільки X компактна, f є замкненим відображенням, тобто образ замкненої множини замкнений. Тому $f(X \setminus \coprod_{i=1}^{n} U_i)$ замкнена. Оскільки y міститься у її доповненні, що є відкритим, існує відкрита множина U, $y \in U$, така що $U \subset Y \setminus f(X \setminus \coprod_{i=1}^{n} U_i)$. Звідси випливає, що $f^{-1}(U) \subset \coprod_{i=1}^{n} U_i$.

Покладімо $W_i = f^{-1}(U) \cap U_i$, тоді $f^{-1}(U) = \coprod_{i=1}^{n} W_i$.

Для кожного $p \in U \setminus \{y\}$ та для кожного $x \in f^{-1}(p)$ кратність $\operatorname{mult}_x f$ дорівнює 1. Тому $d_p(f) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{mult}_x f = \sum_{i=1}^{n} \#(f^{-1}(p) \cap W_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

З іншого боку, $d_y(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i$ також.

Це демонструє, що $d_p(f)$ стала на U, отже локально стала, що завершує доведення. □

6.2. **Дивізори.** Нехай X компактнаРіманова поверхня.

Означення 6.1. Нехай $\operatorname{Div}(X)$ вільна абелева група породжена точками X. Ця група називається групою дивізорів Ріманової поверхні X.

Елементи $\mathrm{Div}(X)$ — це лінійні комбінації

$$\sum_{x\in X} n_x \cdot x, \quad n_x \in \mathbb{Z}, \quad \text{скінченна кількість } n_x \neq 0.$$

Для дивізора

$$D = \sum_{x\in X} n_x \cdot x$$

нехай $D(x) := n_x$. Таким чином дивізори ототожнюються із функціями $X \to \mathbb{Z}$ зі скінченним носієм.

Нехай $\deg D = \sum_{x\in X} n_x$ степінь D.

Зауважмо, що

$$\deg : \mathrm{Div}\, X \to \mathbb{Z}, \quad D \mapsto \deg D$$

є гомоморфізмом груп. Його ядро складається із усіх дивізорів степеня нуль й позначається $\mathrm{Div}^0(X)$.

Нехай $f \in \mathcal{M}_X(X)$ відмінна від нуля мероморфна функція. Ототожнюючи f з відповідним голоморфним відображенням $X \to \hat{\mathbb{C}}$, для $p \in X$ визначмо

$$\mathrm{ord}_p f := \begin{cases} \mathrm{mult}_p f, & \text{якщо } f(p) = 0 \\ -\mathrm{mult}_p f, & \text{якщо } f(p) = \infty \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Зауважмо, що з цього означення випливає, що $\mathrm{mult}_p \lambda = 0$ для ненульової сталої функції $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Корисно покласти $\mathrm{ord}_p 0 = \infty$.

Число $\mathrm{ord}_p f$ називається порядком p відносно f. Отже точки з додатними порядками є нулями f, точки з від'ємними порядками є полюсами f, точки порядку нуль не є ні нулями, ні полюсами f.

Означення 6.2. Для мероморфної ненульової функції $f \in \mathcal{M}_X(X)$ покладімо

$$(f) := \sum_{x\in X} (\mathrm{ord}_x f) \cdot x \in \mathrm{Div}\, X.$$

Дивізори такої форми називаються головними дивізорами.

Зауваження 6.3. Зауважмо, що (f) несе у собі усю інформацію про нулі та полюси мероморфної функції f.

Спостереження. $(f \cdot g) = (f) + (g)$, $(1/f) = -(f)$.

Таким чином множина головних дивізорів є підгрупою у $\mathrm{Div}\, X$, ця підгрупа позначається $\mathrm{PDiv}\, X$. Оскільки за Теоремою 5.5 $d_0(f) = d_\infty(f)$, ми маємо $\deg(f) = 0$ для кожної мероморфної функції f на X. Тому $\mathrm{PDiv}\, X$ підгрупа у $\mathrm{Div}^0(X)$ й ми отримуємо включення груп

$$\mathrm{PDiv}\, X \subset \mathrm{Div}^0 X \subset \mathrm{Div}\, X.$$

Фактор-група

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}\, X / \mathrm{PDiv}\, X$$

називається групою Пікара Рімановоï поверхні X. Її елементи називаються класами дивізорів.

Група

$$\operatorname{Pic}^0(X) := \operatorname{Div}^0 X / \operatorname{PDiv} X,$$

яка є підгрупою $\operatorname{Pic} X$, називається обмеженою групою Пікара.

6.3. **Лінійна еквівалентність дивізорів.** Ми казатимемо, що два дивізори D та D' лінійно еквівалентні й писатимемо $D \sim D'$, якщо D та D' представляють той самий клас у $\operatorname{Pic} X$, іншими словами, якщо $D - D' = (f)$ для деякої мероморфної функції f.

Оскільки $\operatorname{PDiv} X$ міститься у ядрі гомоморфізма степені, ми отримуємо гомоморфізм факторизації

$$\operatorname{Pic} X \to \mathbb{Z}, \quad [D] \mapsto \deg D,$$

який, нехтуючи строгістю позначень, також позначатиметься deg.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Div} X \arrow[rr, "\deg"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z} \\
& \operatorname{Pic} X \arrow[ur, "\exists!\deg"'] &
\end{tikzcd}$$

Нехай $D, D' \in \operatorname{Div} X$. Ми казатимемо, що $D \geqslant D'$ або $D' \leqslant D$, якщо

$$D(x) \geqslant D'(x) \text{ для всіх } x \in X.$$

Нехай $D \in \operatorname{Div} X$ й нехай $U \subset X$ відкрита підмножина. Визначмо

$$\mathcal{O}_D(U) := \mathcal{O}_X(D)(U) := \{f \in \mathcal{M}_X(U) \mid \operatorname{ord}_x f \geqslant -D(x) \text{ для всіх } x \in U\}.$$

Цим визначається пучок на X, який позначається $\mathcal{O}_X(D)$. Це пучок $\mathcal{O}_X$-модулів, зокрема це означає, що $\mathcal{O}_X(D)(U)$ є $\mathcal{O}_X(U)$-модулем для кожної відкритої підмножини $U \subset X$.

Дійсно, для $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ та $u \in \mathcal{O}_X(U)$ виконується $\operatorname{ord}_x(uf) = \operatorname{ord}_x u + \operatorname{ord}_x f$. Оскільки $\operatorname{ord}_x u \geqslant 0$, ми робимо висновок, що $\operatorname{ord}_x(uf) \geqslant \operatorname{ord}_x f \geqslant -D(x)$, тобто $u \cdot f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$.

Якщо $V \subset U$ дві відкриті множини, тоді відображення обмеження є гомоморфізмом (абелевих груп)

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \to \mathcal{O}_X(D)(V), \quad f \mapsto f|_V,$$

яке сумісне з структурою модуля, тобто

$$(u \cdot f)|_V = u|_V \cdot f|_V, \quad u \in \mathcal{O}_X(U), f \in \mathcal{O}_X(D)(U).$$

Зауваження 6.4. $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$, тобто $\mathcal{O}_X(0)(U) = \mathcal{O}_X(U)$ для усіх відкритих підмножин $U \subset X$.

6.4. **Вправи.**

Вправа 21. Обчислити головні дивізори (f), (g) наступних мероморфних функцій на $\hat{\mathbb{C}}$ (див. Вправу 17):

$$f(z) = \frac{(z-17)^2}{z^{13}+2}, \quad g(z) = \frac{(z-1)^3}{z^2+11}.$$

Вправа 22. У Вправі 13 ми розглядали дві мероморфні функції $X = \frac{x_1}{x_0}$ та $Y = \frac{x_2}{x_0}$ на Рімановій поверхні

$$C = \{\langle x_0, x_1, x_2\rangle \in \mathbb{P}_2 \mid x_0x_2^2 - x_1^3 + x_0^3 = 0\}.$$

Обчислити відповідні головні дивізори (X) та (Y).

Вправа 23. Показати, що $\operatorname{Pic}^0 \hat{\mathbb{C}} = 0$, тобто $\operatorname{PDiv} X = \operatorname{Div}^0 X$. Зробити висновок, що $\operatorname{Pic} \hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{Z}$.

Означення. Нехай $D \in \operatorname{Div} X$. Тоді

$$\mathcal{L}(D) := \mathcal{O}_X(D)(X) = \{f \in \mathcal{M}_X(X) \mid \operatorname{ord}_x f \geqslant -D(x) \text{ for all } x \in X\}$$

називається простором Рімана-Роха дивізора D. Це векторний простір над $\mathbb{C}$.

Вправа 24. Розглянути комплексний тор $X = \mathbb{C}/\Gamma$, $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot 3i$. Обчислити $\mathcal{L}(D)$ для

$$D = p, \quad p = [4 + 5i] \in X;$$

$$D = p - q, \quad p = [8], q = [2i].$$

7. Лекція 7

7.1. Дивізори та обертовні пучки $\mathcal{O}_X$-модулів.

Твердження 7.1. *Нехай* $D, D' \in \operatorname{Div} X$. *Припустімо* $D \sim D'$, *тоді пучки* $\mathcal{O}_X$*-модулів* $\mathcal{O}_X(D)$ *та* $\mathcal{O}_X(D')$ *ізоморфні.*

Зауваження 7.2. $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(D)$ означає, що для кожної відкритої підмножини $U \subset X$ існує ізоморфізм $\mathcal{O}_X(U)$-модулів

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \xrightarrow{\eta(U)} \mathcal{O}_X(D')(U)$$

сумісний із відображеннями обмеження, тобто для включення відкритих підмножин $W \subset U \subset X$

$$\eta(U)(s)|_W = \eta(W)(s|_W) \quad \text{для кожного } s \in \mathcal{O}_X(D)(U),$$

або ж, еквівалентно, існує комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(D)(U) \arrow[r, "\eta(U)"] \arrow[d, "\rho_{UW}"] & \mathcal{O}_X(D')(U) \arrow[d, "\rho_{UW}"] \\
\mathcal{O}_X(D)(W) \arrow[r, "\eta(W)"] & \mathcal{O}_X(D')(W),
\end{tikzcd}$$

де ρ_{UW} позначає відображення обмеження $s \mapsto s|_W$.

Доведення Твердження 7.1. $D \sim D'$ означає $D - D' = (s)$ для деякого $s \in \mathcal{M}_X(X)$. Тоді для кожної відкритої підмножини $U \subset X$ та $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ (тобто $\operatorname{ord}_x f \geqslant -D(x)$ для кожного $x \in X$) ми отримуємо

$$\operatorname{ord}_x(s|_U \cdot f) = \operatorname{ord}_x(s) + \operatorname{ord}_x f \geqslant \operatorname{ord}_x s - D(x) = \operatorname{ord}_x s - (D' + (s))(x) = -D'(x),$$

а отже відображення

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \xrightarrow{\eta(U)} \mathcal{O}_X(D')(U), \quad f \mapsto s|_U \cdot f$$

коректно визначене. Ми бачимо, що це ізоморфізм $\mathcal{O}_X(U)$-модулів з оберненим відображенням $g \mapsto s^{-1}|_U \cdot g$. Тому $\eta(U)$ ізоморфізм. Сумісність із обмеженнями має місце також. ☐

Зауваження 7.3. Навіть більше має місце. Нехай $D, D' \in \operatorname{Div} X$. Тоді пучки $\mathcal{O}_X$-модулів $\mathcal{O}_X(D)$ та $\mathcal{O}_X(D')$ ізоморфні тоді й лише тоді $D \sim D'$.

Вправа. Спробуйте довести це. Можете спробувати наступні кроки.

1) Зауважте, що, для достатньо малого $U \subset X$, $\mathcal{O}_X(U)$-модуль $\mathcal{O}_X(D)(U)$ ізоморфний до $\mathcal{O}_X(U)$. Це означає, що $\mathcal{O}_X(D)$ є так званим обертовним пучком (лінійним розшаруванням).
2) Нехай R — це довільна $\mathbb{C}$-алгебра. Зауважте, що задання гомоморфізму R-модулів $R \to R$ є еквівалентним до вибору елемента $r \in R$ (образа $1 \in R$).
3) Використовуючи попередні спостереження, показати, що кожен ізоморфізм $\eta(U)$: $\mathcal{O}_X(D)(U) \to \mathcal{O}_X(D')(U)$ має форму $f \mapsto s \cdot f$, $s \in \mathcal{M}_X(U)$, для достатньо малого U.
4) Проаналізуйте ситуацію й отримайте шукане твердження.

Твердження 7.4. *Нехай* $D \in \operatorname{Div} X$ *дивізор на компактній Рімановій поверхні* X*. Тоді* $\mathcal{O}_X(D)$ *обертовний пучок, тобто для кожної точки* $x \in X$ *існує відкритий окіл* U *точки* x*, такий що* $\mathcal{O}_X(D)|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$*. Зокрема, це означає, що для кожної відкритої підмножини* $V \subset U$ *існує ізоморфізм* $\mathcal{O}_X(V)$*-модулів*

$$\eta(V) : \mathcal{O}_X(D)(V) \to \mathcal{O}_X(V)$$

сумісний із відображеннями обмеження.

Доведення. Достатньо знайти локально навколо кожної точки x мероморфну функцію $G \in \mathcal{M}_X(U)$ із $\operatorname{ord}_y f = -D(y)$ для $y \in U$. Тоді відображення

$$\mathcal{O}_X(D)(V) \to \mathcal{O}_X(V), \quad f \mapsto G^{-1} \cdot f,$$

є шуканими ізоморфізмами. □

7.2. **Простір Рімана-Роха.**

Означення 7.5. Нехай $D \in \operatorname{Div} X$. Тоді

$$\mathcal{L}(D) := \mathcal{O}_X(D)(X) = \{f \in \mathcal{M}_X(X) \mid \operatorname{ord}_x f \geqslant -D(x)\}$$

називається простором Рімана-Роха дивізора D. Це векторний простір над $\mathbb{C}$.

Приклад 7.6. 1) Нехай $D = a$ для деякого $a \in X$. Тоді

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ f \in \mathcal{M}_X(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ має щонайбільше 1 полюс кратності 1 й} \\ \text{цей полюс може бути лише у точці } a \end{array} \right\}.$$

2) Нехай $D = n \cdot a$ для деякого $a \in X$ і додатного цілого числа n. Тоді

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ f \in \mathcal{M}_X(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ має щонахбільше 1 полюс кратності що-} \\ \text{найбільше } n \text{ і цей полюс може бути лише} \\ \text{у точці } a \end{array} \right\}.$$

3) Нехай $D = -n \cdot a$ для деякого $a \in X$ і додатного цілого числа n. Тоді

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ f \in \mathcal{M}_X(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ не має полюсів і обов'язково має нуль} \\ \text{кратності щонайменше } n \text{ у точці } a \end{array} \right\}.$$

Виявляється,що простори Рімана-Роха скінченновимірні.

Теорема 7.7. $\dim \mathcal{L}(D) < \infty$ *для довільного* $D \in \operatorname{Div} X$.

Позначення. $l(D) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$.

Ідея доведення. Ми слідуватимемо наступним крокам.

1) $l(D) = 0$ для D із $\deg D < 0$, $l(0) = 1$.
2) Якщо $D' = D + a$ для деякого $a \in X$, то існує включення векторних просторів $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$ та $\dim \mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D) \leqslant 1$.
3) Отже, за індукцією, $\dim \mathcal{L}(D) < \infty$ для кожного дивізора D.

□

Приклад 7.8. 1) Нехай $p, q \in X$, $p \neq q$.
  (a) Якщо $D = p$, тоді $l(D) \leqslant 2$, бо $D = 0 + p$ й $l(0) = 1$.

   (b) Якщо $D = -p$, тоді $l(D) = 0$.
   (c) Якщо $D = p - q$, тоді $l(D) \leqslant 1$, бо $D = (-q) + p$ й $l(-q) = 0$.
2) Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ комплексних тор. Тоді $l(p) = 1$ для кожного $p \in X$.
3) Нехай $X = \hat{\mathbb{C}}$. Тоді $l(p) = 2$ для кожного $p \in X$.

7.3. **Вправи.**

Вправа 25. Нехай D та D' два дивізори на компактній Рімановій поверхні X. Припустімо, що пучки $\mathcal{O}_X$-модулів $\mathcal{O}_X(D)$ та $\mathcal{O}_X(D')$ ізоморфні за допомогою ізоморфізма

$$\eta : \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X(D').$$

Довести, що з цього випливає, що D та D' лінійно еквівалентні.

Можете спробувати наступні кроки.

1) Нехай R — це довільна $\mathbb{C}$-алгебра. Зауважте, що задання гомоморфізму R-модулів $R \to R$ є еквівалентним до вибору елемента $r \in R$ (образа $1 \in R$).
2) Використовуючи попереднє спостереження і той факт, що обидва пучки $\mathcal{O}_X(D)$ та $\mathcal{O}_X(D')$ обертовні, показати, що кожен ізоморфізм $\eta(U) : \mathcal{O}_X(D)(U) \to \mathcal{O}_X(D')(U)$ має форму $f \mapsto s \cdot f$, $s \in \mathcal{M}_X(U)$, для достатньо малого U.
3) Проаналізуйте ситуацію і зробіть висновок, що η глобально має форму $f \mapsto s \cdot f$ для мероморфної функції $s \in \mathcal{M}_X(X)$. Використовуючи це, отримайте необхідне твердження.

Вправа 26. Нехай $X = \hat{\mathbb{C}}$.

1) Обчисліть простір Рімана-Роха $\mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}(D)$ для

$$D = n \cdot p, \quad p = 0 \in X, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2) Зауважте, що Вправа 23 говорить, що два дивізори на $\hat{\mathbb{C}}$ лінійно еквівалентні тоді і лише тоді, якщо вони мають однаговий степінь, зокрема для кожного дивізора D на $\hat{\mathbb{C}}$ й кожного $p \in \hat{\mathbb{C}}$

$$D \sim \deg D \cdot p.$$

У лекції ми згадали, що еквівалентні дивізори мають ізоморфні простори Рімана-Роха. Якщо $D - D' = (s)$ для деякої $s \in \mathcal{M}_X(X)$, тоді ізоморфізм заданий відображенням

$$\mathcal{L}(D) \to \mathcal{L}(D'), \quad f \mapsto s \cdot f.$$

Використовуючи це та ваші обчислення із частини 1) цієї вправи, обчисліть простір Рімана-Роха $\mathcal{L}(D)$ для наступних дивізорів.

$$D = p, \quad p = 5 + 2i;$$

$$D = p - q, \quad p = 3, q = 4 - i;$$

$$D = 2p + 3q - 18r, \quad p = 6 - 2i, q = 47i, r = 356 - 3i;$$

$$D = 2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4, \quad x_1 = 11i, \quad x_2 = (2 - i), \quad x_3 = 44, \quad x_4 = \infty.$$

3) Перевірити, які з наступних дивізорів на $\hat{\mathbb{C}}$ є лінійно еквівалентними і описати ізоморфізми відповідних просторів Рімана-Роха для пар лінійно еквівалентних дивізорів.

$$D_1 = 3 \cdot (5+8i) + 27 \cdot (1-i) - 6 \cdot (8i), \quad D_2 = 5 \cdot (i), \quad D_3 = 7 \cdot (28+3i) - 1 \cdot (i) - 1 \cdot (48),$$
$$D_4 = 4 \cdot (18) + 20 \cdot (33i), \quad D_5 = 3 \cdot (16+11i).$$

Вправа 27. 1) Нехай D дивізор на компактній Рімановій поверхні. Нехай $\mathcal{L}(D)$ його простір Рімана-Роха. У лекції ми бачили, що $\mathcal{L}(D)$ скінченновимірний простір над $\mathbb{C}$. У випадку $\deg D \geqslant 0$, використовуючи наше доведення, отримати наступну оцінку для розмірності $l(D)$ простору $\mathcal{L}(D)$:

$$l(D) \leqslant \deg D + 1.$$

2) Нехай $X = \hat{\mathbb{C}}$ і нехай $D \in \operatorname{Div} \hat{\mathbb{C}}$ дивізор із невід'ємним степенем. Показати, що попередня нерівність стає рівністю у цьому випадку, тобто

$$l(D) = \deg D + 1.$$

Підказка: *Достатньо знайти* $\deg D + 1$ *лінійно незалежних мероморфних функцій із простору* $\mathcal{L}(D)$. *Використайте Вправу 26.*

Вправа 28. Визначмо $X = \{\langle x_0, x_1, x_2\rangle \in \mathbb{P}_2 \mid x_1^2 - x_0x_2 = 0\}$. Тоді X — це 1-вимірний комплексний підмноговид у $\mathbb{P}_2$. Нехай $p = \langle 0,0,1\rangle \in X$, нехай $D = p$. Обчисліть $l(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$.

Підказка: *Дослідіть відображення* $\mathbb{P}_1 \to X$, $\langle s,t\rangle \mapsto \langle s^2, st, t^2\rangle$.

8. Лекція 8

8.1. Простори Рімана-Роха скінченновимірні. Минулого разу ми дали ідею доведення Теореми 7.7. Наведімо тепер повне доведення.

Доведення Теореми 7.7.

1) Нехай $\deg D < 0$. Припусітімо, що $l(D) \neq 0$, тоді $\mathcal{L}(D) \neq 0$. Візьмімо довільну відмінну від нуля мероморфну функцію $f \in \mathcal{L}(D) \subset \mathcal{M}_X(X)$. Тоді $(f) \geqslant -D$ і, зокрема, $\deg f \geqslant \deg(-D) = -\deg D > 0$. Це суперечність.

   Оскільки $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$, маємо $l(0) = 1$.

   Це дає базу індукції.

2) Нехай $D \in \operatorname{Div} X$, нехай $a \in X$, нехай $D' = D + a$. Тоді $D' \geqslant D$ й отже $-D(x) \geqslant -D'(x)$ та $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$.

   Оберімо карту $\varphi : U \to V$ навколо a, так щоб $\varphi(a) = 0$. Для кожного $f \in \mathcal{L}(D')$ покладімо $f_\varphi := f|_U \circ \varphi^{-1}$. Тоді f_φ мероморфна функція на V. Розгляньмо її ряд Лорана у точці 0. Оскільки $f \in \mathcal{L}(D')$, f_φ може мати у 0 полюс кратності щонайбільше $D'(a) = 1 + D(a) = 1 + d$, де $d = D(a)$. Таким чином

$$f_\varphi(z) = a_{-d-1}(f) \cdot z^{-d-1} + a_{-d} \cdot z^{-d} + \cdots = \sum_{i=-d-1}^{\infty} a_i(f) \cdot z^i, \quad a_i(f) \in \mathbb{C}$$

   навколо точки 0.

   Розгляньмо тепер $\mathcal{L}(D') \xrightarrow{\xi} \mathbb{C}, \quad f \mapsto a_{-d-1}(f)$. Це лінійне відображення. Його ядро співпадає із $\mathcal{L}(D)$. Отже $\mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D')/\ker \xi \cong \operatorname{Im} \xi \subset \mathbb{C}$ а значить $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D) \leqslant 1$.

3) Зауважмо, що кожен дивізор D' може бути записаний у формі $D' = D + a$ для деякого $a \in X$ та $D \in \operatorname{Div} X$. Зокрема $\deg D < \deg D'$. Це дає крок індукції.

Це завершує доведення. ☐

8.2. Шари структурного пучка. Нехай $a \in X$. Розгляньмо множину пар

$$\{(U, f) \mid U \subset X \text{ відкрита}, a \in U, f \in \mathcal{O}_X(U)\}.$$

Визначмо відношення

$$(U, f) \sim (V, g) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists \text{ відкрита } W \subset U \cap V,\ a \in W, \text{ така що } f|_W = g|_W.$$

Факт. *“$\sim$” є відношенням еквівалентності.*

Доведення. Вправа. ☐

Означення 8.1. Множина класів еквівалентності позначається $\mathcal{O}_{X,a}$ і називається **шаром** структурного пучка $\mathcal{O}_X$ у точці a.

Ми писатимемо $[(U, f)]$ або $[U, f]$ для класу еквівалентності пари (U, f). Нехтуючи строгістю позначень, ми також писатимемо f_a, що означає клас еквівалентності голоморфної функції f, яка визначена у деякому околі a. Цей клас еквівалентності називається **ростком** пари (U, f) (або просто ростком f) у точці a.

Факт. *$\mathcal{O}_{X,a}$ є $\mathbb{C}$-алгеброю із операціями визначеними наступним чином*

$$f_a + g_a = (f + g)_a, \quad f_a \cdot g_a = (fg)_a, \quad \lambda \cdot f_a = (\lambda f)_a.$$

Доведення. Вправа. □

Факт (Модельний приклад). $\mathcal{O}_{\mathbb{C},a} \cong \mathbb{C}\{z-a\} \cong \mathbb{C}\{z\}$ *(збіжний ряд).*

Доведення. Визначмо

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C},a} \mapsto \mathbb{C}\{z-a\}, \quad [U,f] \mapsto \text{розклад Тейлора функції } f \text{ у точці } a\text{: } f(z) = \sum_{i\geqslant 0} c_i(z-a)^i.$$

Це дає шуканий ізоморфізм. □

Оскільки кожна Ріманова поверхня локально ізоморфна до $\mathbb{C}$, ми робимо визновок, що $\mathcal{O}_{X,a} \cong \mathbb{C}\{z\}$ для кожного $a \in X$. Дійсно, зафіксуймо карту $\varphi : U \to V$ around $a \in X$. Тоді

$$\mathcal{O}_{X,a} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C},\varphi(a)}, \quad f_a \mapsto (f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(a)}$$

дає ізоморфізм $\mathbb{C}$-алгебр $\mathcal{O}_{X,a} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C},\varphi(a)} \cong \mathbb{C}\{z\}$.

Розгляньмо гомоморфізм обчислення

$$\mathrm{ev} : \mathcal{O}_{X,a} \to \mathbb{C}, \quad f_a \mapsto f(a).$$

Його ядро — це ідеал $\mathfrak{m}_{X,a} \subset \mathcal{O}_{X,a}$, що визначений як

$$\mathfrak{m}_{X,a} = \{[U,f] \in \mathcal{O}_{X,a} \mid f(a) = 0\}.$$

Оскільки $\mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_{X,a} \cong \mathbb{C}$ і $\mathbb{C}$ є полем, робимо висновок, що $\mathfrak{m}_{X,a}$ максимальний ідеал алгебри $\mathcal{O}_{X,a}$.

Факт. $\mathfrak{m}_{X,a}$ *єдиний максимальний ідеал* $\mathcal{O}_{X,a}$. *У такому випадки кажуть, що* $\mathcal{O}_{X,a}$ *є локальною алгеброю (або локальним кільцем) Ріманової поверхні* X *у точці* a.

Зауваження 8.2. Нагадаймо, що кільце з єдиним максимальним ідеалом називається локальним.

Під дією ізоморфізма $\mathcal{O}_{X,a} \cong \mathbb{C}\{z\}$ ідеал $\mathfrak{m}_{X,a}$ переходить у ідеал у $\mathbb{C}\{z\}$, що складається із усіх збіжних рядів із тривіальним (нульовим) вільним членом, тобто головний ідеал $\langle z \rangle$, породжений елементом z.

Зауваження 8.3. Зауважмо, що $\mathbb{C}\{z\}$ є областю головних ідеалів, тобто усі ідеали є головними, тобто породженними одним елементом. Більше того, кожен ідеал у $\mathbb{C}\{z\}$ має форму $\langle z^m \rangle$ для деякого $m \geqslant 0$.

Доведення. Вправа. □

8.3. **Кодотичний простір.**

Нехай $\mathfrak{m}^2_{X,a}$ ідеал породжений добутками $s_1 \cdot s_2$, $s_1, s_2 \in \mathfrak{m}_{X,a}$. Це відповідає головному ідеалу $\langle z^2 \rangle$. Зрозуміло, що $\mathfrak{m}^2_{X,a} \subset \mathfrak{m}_{X,a}$. Розгляньмо фактор $\mathcal{O}_{X,a}$-модуль і відповідний фактор $\mathbb{C}\{z\}$-модуль $\langle z \rangle / \langle z^2 \rangle$. Тоді

$$\mathfrak{m}_{X,a}/\mathfrak{m}^2_{X,a} \cong \langle z \rangle / \langle z^2 \rangle \cong \mathbb{C} \cdot [z],$$

де $[z]$ позначає клас z у $\langle z \rangle / \langle z^2 \rangle$.

Ми бачимо, що не зважаючи та те, що $\mathfrak{m}_{X,a}$ та $\mathfrak{m}^2_{X,a}$ є нескінченновимірними векторними просторами над $\mathbb{C}$, їхній фактор $\mathfrak{m}_{X,a}/\mathfrak{m}^2_{X,a}$ є одновимірним векторним простором над $\mathbb{C}$.

Означення 8.4. Векторний простір $\mathfrak{m}_{X,a}/\mathfrak{m}_{X,a}^2$ називається кодотичним простором Рімановоï поверхні X у точці a і позначатиметься у цих лекціях за допомогою $\mathrm{CT}_a X$.

Його дуальний простір

$$(\mathfrak{m}_{X,a}/\mathfrak{m}_{X,a}^2)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{X,a}/\mathfrak{m}_{X,a}^2, \mathbb{C})$$

називається дотичним простором Рімановоï поверхні X у точці a і позначається $\mathrm{T}_a X$.

8.4. **Диференціали голоморфних функцій.**

Означення 8.5. Нехай $[U, f] \in \mathcal{O}_{X,a}$. Покладімо $d_a f := [f - f(a)] \in \mathrm{CT}_a X$. Це визначає відображення

$$df : U \to \bigsqcup_{a \in U} \mathrm{CT}_a X, \quad a \mapsto d_a f,$$

яке називається диференціалом f.

Означення 8.6. Нехай $\varphi : U \to V$ карта Рімановоï поверхні X. Нехай $a \in U$. Ми називаємо φ локальною координатою у точці a, якщо $\varphi(a) = 0$.

Ми часто позначатимемо локальні координати латинськими літерами, наприклад $z : U \to V \subset \mathbb{C}$.

Нехай $z : U \to V \subset \mathbb{C}$ локальна координата у точці $a \in U$. Тоді $d_a z$ відмінний від нуля елемент $\mathrm{CT}_a X$. Таким чином, ми можемо розглядати його, як базисний вектор $\mathrm{CT}_a X$.

Зокрема, можливо записати $df(x) = g(x) \cdot dz(x)$ для деякоï функціï $g : U \to \mathbb{C}$. Дослідімо це більш детально.

Розгляньмо композицію $F = f \circ z^{-1}$. Це голоморфна фунцкія у околі V точки $0 \in \mathbb{C}$. Для $b \in U$ розгляньмо розклад Тейлора функціï F у точці $z(b) \in V$.

$$F(t) = \sum_{i \geqslant 0} c_i (t - z(b))^i.$$

Тоді

$$f(x) = f \circ z^{-1} \circ z(x) = F(z(x)) = \sum_{i \geqslant 0} (z(x) - z(b))^i$$

і отже

$$d_b f = [f - f(b)] = [\sum_{i \geqslant 1} c_i (z - z(b))^i] = [c_1(z - z(b)) + (z - z(b))^2 \sum_{i \geqslant 2} c_i (z - z(b))^{i-2}] =$$
$$[c_1(z - z(b))] = c_1[z - z(b)] = F'(z(b)) \cdot d_b z.$$

Означення 8.7. Нехай $z : U \to V$ локальна координата у точці $a \in U$. Нехай $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Покладімо, як і вище, $F = f \circ z^{-1}$ та визначмо

$$\frac{\partial f}{\partial z}(b) := F'(z(b)) = \frac{\partial F}{\partial t}(z(b)).$$

У цих позначеннях $d_b f = \frac{\partial f}{\partial z}(b) \cdot d_b z$ й нарешті

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz, \tag{8.1}$$

формула, яка виглядає знайомою.

8.5. **Пучок голоморфних диференціальних форм.** Нехай $U \subset X$ відкрита підмножина Рімановoї поверхні X. Ми щойно бачили, що кожна $f \in \mathcal{O}_X(U)$ дає відображення

$$df : U \to \bigsqcup_{a \in U} \mathrm{CT}_a\, X, \quad a \mapsto d_a f.$$

Більше того, ми обчислили, що для локальної координати $z : W \to \mathbb{C}$, $W \subset U$ виконується $df|_W = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz$.

Нехай тепер $\omega : U \to \bigsqcup_{a \in U} \mathrm{CT}_a\, X$ довільне відображення, таке що $\omega(a) \in \mathrm{CT}_a\, X$. Тоді, як і вище, для локальної координати $z : W \to \mathbb{C}$, $W \subset U$, ми маємо

$$\omega|_W = g \cdot dz$$

для деякої функції $g : W \to \mathbb{C}$.

Означення 8.8. Нехай ω — це функція, як вище. Якщо g голоморфна функція для кожної локальної координати $z : W \to \mathbb{C}$, тоді ω називається голоморфною диференціальною формою на U.

Еквівалентно, ω є голоморфною диференціальною формою, якщо U може бути покрита відкритими множинами U_i із локальними координатами $z_i : U_i \to \mathbb{C}$, так що після зображення обмежень ω як $\omega|_{U_i} = f_i \cdot dz_i$, функції $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ голоморфні.

Множина усіх голоморфних диференціальних форм на U позначається $\Omega_X(U)$. Це природним чином $\mathcal{O}_X(U)$-модуль. Це визначає пучок $\mathcal{O}_X$-модулів. Пучок Ω_X називається пучком (голоморфних) диференціальних форм на X.

Зауваження 8.9. Зауважмо, що із означення Ω_X випливає, що Ω_X є обертовним пучком $\mathcal{O}_X$-модулів.

Вправа. Показати, що Ω_X обертовний пучок. Порівняйте ваше доведення із доведенням Твердження 7.4.

Приклад 8.10. Як ми вже бачили вище, df голоморфна диференціальна форма на U для кожного $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Зауваження 8.11. Для кожної відкритої підмножини $U \subset X$ відображення

$$\mathcal{O}_X(U) \to \Omega_X(U), \quad f \mapsto df$$

є лінійним відображенням векторних просторів над $\mathbb{C}$, що дає морфізм $\mathcal{O}_X \to \Omega_X$ пучків векторних просторів над $\mathbb{C}$.

Приклад 8.12. Обчислімо $\Omega_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$. Нехай $\omega \in \Omega_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$. Нехай $z_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ та $z_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ стандартні карти на $\hat{\mathbb{C}}$. Тоді $\omega|_{U_0} = f_0 dz_0$ й $\omega|_{U_1} = f_1 dz_1$ для деяких голоморфних функцій f_0 та f_1 на U_0 та U_1 відповідно. Також має виконуватися $f_0 dz_0|_{U_0 \cap U_1} = f_1 dz_1|_{U_0 \cap U_1}$. Оскільки $z_0 = 1/z_1$ на $U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$, використовуючи (8.1), ми отримуємо $dz_0 = (-1/z_1^2) dz_1$, отже $f_0(1/z_1) \cdot (-1/z_1^2) dz_1 = f_1(z_1) dz_1$, і значить $f_0(1/z_1) = -z_1^2 f_1(z_1)$. Порівнюючи розклади Лорана цих двох голоморфних функцій на $\mathbb{C}^*$, ми отримуємо $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, що означає $\Omega_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}}) = 0$.

8.6. **Вправи.**

Вправа 29. (0) Нехай a точка Рімановою поверхні X. Показати, що шар $\mathcal{O}_{X,a}$ є $\mathbb{C}$-алгеброю із операціями визначеними наступним чином:

$$f_a + g_a := (f+g)_a, \quad f_a \cdot g_a := (fg)_a, \quad \lambda \cdot f_a := (\lambda f)_a, \quad f_a, g_a \in \mathcal{O}_{X,a}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Перевірити, зокрема, що означення дані у лекції коректно визначені, тобто не залежать від вибори представників класів еквівалентності.

(1) Розглянути гомоморфізм обчислення $\mathbb{C}$-алгебр

$$\mathcal{O}_{X,a} \xrightarrow{\text{ev}} \mathbb{C}, \quad [U,f] \mapsto f(a).$$

Показати, що його ядро — це єдиний максимальний ідеал алгебри $\mathcal{O}_{X,a}$.

Вправа 30. Розгляньмо наступні голоморфні функції на $\mathbb{C}$.

$$f_1(z) = (z-3)(z+5i)^6 + 11, \quad f_2(z) = \exp(z), \quad f_3(z) = \sin(z^2).$$

Для $a = 0, 3, -5i$ знайти твірний кодотичного простору $\mathrm{CT}_a\,\mathbb{C}$ і виразіть $d_a f_i$, $i = 1, 2, 3$, через цей твірний.

Вправа 31. Розгляньмо Ріманову сферу $\hat{\mathbb{C}}$ і нехай $z_0 = \varphi_0$ та $z_1 = \varphi_1$ її стандартні карти. Розгляньмо мероморфну функцію

$$f(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-2)^3} \in \mathcal{M}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$$

як голоморфну функцію на $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{1, 2\}$.

Обчислити

$$\frac{\partial f}{\partial z_0}(0), \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}(\infty), \quad \frac{\partial f}{\partial z_0}(-1), \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}(-1), \quad \frac{\partial f}{\partial z_0}(3), \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}(3).$$

Для $a = 0, \infty, -1, 3$ виразити, якщо можливо, $d_a f$ через $d_a z_0$ та $d_a z_1$.

Вправа 32. 1) Показати, що не існує нетривіальних голоморфних диференціальних форм на $\hat{\mathbb{C}}$, тобто $\Omega_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}}) = 0$.

2) Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ комплексний тор. Знайти нетривіальну диференціальну форму ω_0 на X.

9. Лекція 9

9.1. Пучок мероморфних диференціальних форм.

Означення 9.1. Нехай U відкрита підмножина Рімановової поверхні X. Мероморфна диференціальна формаю на U — це елемент $\omega \in \Omega_X(U \setminus S)$ для деякої дискретної множини S, так що для кожної карти $U' \xrightarrow{z} V'$ із $U' \subset U$ локальні вирази $\omega|_{U' \setminus S} = f dz$ задані мероморфними фунцкіями $f \in \mathcal{M}_X(U')$.

Нехай $\mathcal{K}_X(U)$ позначає множину усіх мероморфних диференціальних форм на U.

Зауваження 9.2. $\mathcal{K}_X(U)$ є природним чином $\mathcal{M}_X(U)$-модуль: для $f \in \mathcal{M}_X(U)$ та для for $\omega \in \mathcal{K}_X(U)$

$$(f \cdot \omega)(x) = f(x) \cdot \omega(x).$$

Більше того, $\mathcal{K}_X$ пучок $\mathcal{M}_X$-модулів. Зокрема, $\mathcal{K}_X$ пучок $\mathcal{O}_X$-модулів.

Аналогічно до випадку голоморфних диференціальних форм, існує гомоморфізм пучків векторних просторів над $\mathbb{C}$ (зауважте, що він не є гомоморфізмом $\mathcal{O}_X$-модулів!)

$$\mathcal{M}_X \xrightarrow{d} \mathcal{K}_X.$$

А саме, для кожної відкритої підмножини $U \subset X$ існує лінійне відображення векторних просторів

$$\mathcal{M}_X(U) \to \mathcal{K}_X(U), \quad f \mapsto df$$

і комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "d"] & \mathcal{M}_X(U) \arrow[d, "d"] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f \arrow[d, mapsto] \\
\Omega_X(U) \arrow[r, hook] & \mathcal{K}_X(U), & df \arrow[r, mapsto] & df.
\end{tikzcd}$$

9.2. Мероморфні диференціальні форми та дивізори.

Означення 9.3. Нехай $\omega \in \mathcal{K}_X(U)$ для деякої відкритої підмножини $U \subset X$. Нехай $a \in U$, нехай $z : U' \to V'$ локальна координата у точці a. Запишімо $\omega|_{U'} = f dz$ для деякого $f \in \mathcal{M}_X(U')$. Визначмо порядок диференціальної форми ω о точці a за допомогою

$$\operatorname{ord}_a \omega := \operatorname{ord}_a f.$$

Факт. $\operatorname{ord}_a \omega$ *не залежить від вибору* z.

Доведення. Вправа. ☐

Означення 9.4. Нехай X компактнаРіманова поверхня. Нехай $\omega \in \mathcal{K}_X(X)$. Визначмо дивізор асоційований із ω за допомогою

$$(\omega) := \sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x \omega \cdot x \in \operatorname{Div} X.$$

Приклад 9.5. Нехай $X = \hat{\mathbb{C}}$. Ми вже знаємо (див. Приклад 8.12), що не існує нетривіальних голоморфних диференціальних форм на $\hat{\mathbb{C}}$.

Повторімо аргументи, наведені у Прикладі 8.12, щоб знайти нетривіальну мероморфну диференціальну форму на $\hat{\mathbb{C}}$.

Нехай $\omega \in \mathcal{K}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$. Нехай $z_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ та $z_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ — це стандартні карти на $\hat{\mathbb{C}}$. Тоді $\omega|_{U_0} = f_0 dz_0$ та $\omega|_{U_1} = f_1 dz_1$ для деяких мероморфних функцій f_0 та f_1 на U_0 та U_1 відповідно. Також має виконуватися $f_0 dz_0|_{U_0 \cap U_1} = f_1 dz_1|_{U_0 \cap U_1}$. Оскільки $z_0 = 1/z_1$ на $U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$, використовуючи (8.1), отримуємо $dz_0 = (-1/z_1^2)dz_1$, а отже $f_0(1/z_1) \cdot (-1/z_1^2)dz_1 = f_1(z_1)dz_1$, й зрештою $f_0(1/z_1) = -z_1^2 f_1(z_1)$. Покладімо $f_0(z_0) = 1$. Тоді $1 = -z_1^2 f_1(z_1)$, тобто $f_1(z_1) = -1/z_1^2$. Таким чином ми щойно знайшли нетривіальну мероморфну диференціальну форму ω на $\hat{\mathbb{C}}$. Ця форма співпадає із dz_0 на U_0 та дорівнює $-\frac{1}{z_1^2}dz_1$ на U_1.

Обчислімо дивізор асоційований із ω. Оскільки $\operatorname{ord}_a \omega = \operatorname{ord}_a 1 = 0$ для $a \in \mathbb{C}$ та $\operatorname{ord}_\infty \omega = \operatorname{ord}_\infty(-\frac{1}{z_1^2}) = -2$, маємо

$$(\omega) = -2 \cdot \infty.$$

Зокрема, $\deg(\omega) = -2$.

Вправа. Знайти нетривіальну мероморфну диференціальну форму ω' на $\hat{\mathbb{C}}$ відмінну від форми обчисленої у Прикладі 9.5. Обчисліть відповідний дивізор $(\omega') \in \operatorname{Div}\hat{\mathbb{C}}$ та його степінь $\deg(\omega')$.

9.3. **Мероморфні диференціальні форми та мероморфні функції.**

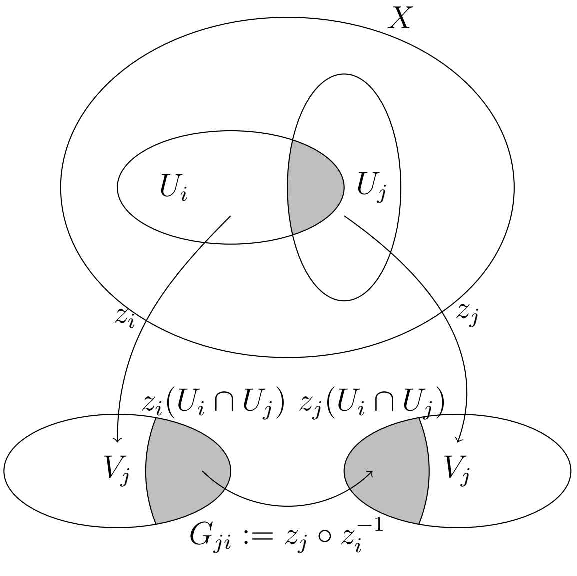
Твердження 9.6. *Нехай* $\omega_0 \in \mathcal{K}_X(X)$, $\omega_0 \not\equiv 0$. *Тоді* $\mathcal{K}_X(X) = \{f \cdot \omega_0 \mid f \in \mathcal{M}_X(X)\}$, *тобто*

$$\mathcal{M}_X(X) \to \mathcal{K}_X(X), \quad f \mapsto f \cdot \omega_0$$

ізоморфізм векторних просторів над $\mathbb{C}$.

Доведення. Нехай $\omega \in \mathcal{K}_X(X)$ довільна мероморфна диференціальна форма на X. Нехай $\bigcup U_i = X$ покриття Ріманової поверхні X картами $z_i : U_i \to V_i$, так що $\omega_0|_{U_i}$ дана як $f_i dz_i$ та $\omega|_{U_i}$ дана як $g_i dz_i$ для деяких мероморфних функцій f_i та g_i та U_i.

Зауважмо, що $f_i \not\equiv 0$ для кожного i. У протилежному випадку, використовуючи аргументацію, подібну до аргументації із доведення Теореми 2.9 (теорема єдиності), $\omega_0 \equiv 0$. Розгляньмо $h_i = g_i/f_i \in \mathcal{M}_X(U_i)$.



Використовуючи (8.1), ми отримуємо

$$dz_j = \frac{\partial z_j}{\partial z_i} dz_i.$$

Отже на $U_i \cap U_j$ ми маємо

$$\omega_0|_{U_i \cap U_j} = f_j dz_j = f_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial z_i} dz_i = f_i dz_i, \quad \omega|_{U_i \cap U_j} = g_j dz_j = g_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial z_i} dz_i = g_i dz_i.$$

Тому

$$f_i = f_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial z_i}, \quad g_i = g_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial z_i},$$

й зрештою

$$h_i|_{U_i \cap U_j} = g_i / f_i = \frac{g_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial z_i}}{f_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial z_i}} = f_j / g_j = h_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Це означає, що існує $h \in \mathcal{M}_X(X)$, така що $h|_{U_i} = h_i$.

We conclude that $g_i = h_i f_i = h f_i$ for every i. This means $\omega = h \cdot \omega_0$.

Це завершує доведення. ☐

9.4. **Канонічний дивізор на компактній Рімановій поверхні й скручені пучки мероморфних диференціальних форм.**

Означення 9.7. Нехай $\omega_0 \in \mathcal{K}_X(X)$, $\omega_0 \neq 0$. Тоді дивізор $K = (\omega_0)$ називається канонічним дивізором на X.

Зауваження 9.8. На компактній Рімановій поверхні завжди існує відмінна від нуля мероморфна диференціальна форма.

Зауважмо водночас, що це зовсім неочевидне й глибоке твердження!

Зауваження 9.9. Зауважмо, що дивізор K не є однозначно визначеним, він залежить від вибору ω_0. Хоча, його клас

$$[K] \in \operatorname{Pic} X = \operatorname{Div} X / \operatorname{PDiv} X$$

не залежить від вибору ω_0.

Означення 9.10. Нехай $D \in \operatorname{Div} X$. Нехай $U \subset X$ відкрита підмножина. Визначмо

$$\Omega_X(D)(U) := \{\omega \in \mathcal{K}_X(U) \mid \operatorname{ord}_a \omega \geqslant -D(a) \text{ для усіх } a \in U\}.$$

Тоді $\Omega_X(D)(U)$ є $\mathcal{O}_X(U)$-модулем, зокрема

$$\Omega_X(D)(X) = \{\omega \in \mathcal{K}_X(X) \mid (\omega) \geqslant -D\} \cup \{0\}$$

є векторним простором над $\mathbb{C}$.

Більше того, $\Omega_X(D)$ є пучком $\mathcal{O}_X$-модулів.

Твердження 9.11. *Нехай X компактна Рімановa поверхня. Нехай $K = (\omega_0)$. Для кожного дизізора $D \in \operatorname{Div}(X)$ існує ізоморфізм $\mathcal{O}_X$-модулів $\mathcal{O}_X(D) \to \Omega_X(D - K)$ визначений для кожної відкритої підмножини $U \subset X$ як*

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \to \Omega_X(D-K)(U), \quad f \mapsto f \cdot \omega_0.$$

Еквівалентно: $\mathcal{O}_X(K+D) \cong \Omega_X(D)$,

$$\mathcal{O}_X(K+D)(U) \to \Omega_X(D)(U), \quad f \mapsto f \cdot \omega_0.$$

Доведення. Пряма перевірка. □

Наслідок 9.12. $\Omega_X(D)(X) \cong \mathcal{O}_X(K+D)(X) = \mathcal{L}(K+D)$, *зокрема*

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_X(D)(X) < \infty$$

для кожного дивізора $D \in \operatorname{Div} X$.

9.5. Рід компактної Рімanової поверхні. Теорема Рімана-Роха. Формула Рімана-Гурвіца.

Означення 9.13. Розмірність $\mathcal{L}(K) \cong \Omega_X(0)(X) = \Omega_X(X)$ називається родом Рімanової поверхні X й позначається

$$g = g_X := \dim_{\mathbb{C}} \Omega_X(X).$$

Приклад 9.14. 1) Оскільки з Прикладу 8.12 випливає $\Omega_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}}) = 0$, маємо $g_{\hat{\mathbb{C}}} = 0$.

2) За Вправою 34 $g_{\mathbb{C}/\Gamma} = 1$ для кожного комплексного тора $\mathbb{C}/\Gamma$.

Теорема 9.15 (Ріман-Рох)**.**

$$l(D) - l(K-D) = \deg D + 1 - g.$$

Еквівалентно,

$$l(D) - \dim \Omega_X(-D)(X) = \deg D + 1 - g.$$

Доведення. Без доведення. □

Приклад 9.16. 1) Нехай $D = 0$. Тоді Теорема 9.15 формулюється як $l(0) - l(K) = \deg 0 + 1 - g$, отже $g = l(K)$, тобто ми просто отримуємо означення роду.

2) Нехай $D = K$. Тоді $l(K) - l(0) = \deg K + 1 - g$, і тому

$$\deg K = 2g - 2.$$

3) Якщо $\deg D \geqslant 2g-1$, тоді $\deg(K-D) = \deg K - \deg D = 2g - 2 - \deg D < 0$, і отже $l(K-D) = 0$ й зрештою

$$l(D) = \deg D + 1 - g.$$

Підсумуємо це наступним чином.

$$\begin{cases} l(D) = 0, & \text{якщо } \deg D < 0; \\ l(D) \geqslant \deg D + 1 - g, & \text{якщо } 0 \leqslant \deg D < 2g-1; \\ l(D) = \deg D + 1 - g, & \text{якщо } \deg D \geqslant 2g-1. \end{cases}$$

Теорема 9.17 (Формула Рімана-Гурвіца). *Нехай* $f : X \to Y$ *нестале голоморфне відображення компактних Ріманових поверхонь. Тоді*

$$2g_X - 2 = d(f)(2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} (\operatorname{mult}_x f - 1)$$

Еквівалентно $\deg K_X = d(f) \deg K_Y + \deg R_f$, *де* K_X *та* K_Y *канонічні дивізори на* X *та* Y *відповідно й* $R_f = \sum_{x \in X} (\operatorname{mult}_x f - 1) \cdot x$ *є так званим дивізором розгалудження відображення* f.

Зауваження 9.18. Зауважмо, що $\operatorname{mult}_x f > 1$ лише для скінченної кількості точок Ріманової поверхні X (точки розгалудження, див. Означення 5.1).

9.6. **Вправи.**

Вправа 33. Знайти дві лінійно незалежні нетривіальні мероморфні диференціальні форми ω_1 та ω_2 на $\hat{\mathbb{C}}$. Обчислити відповідні дивізори $(\omega_1), (\omega_2) \in \operatorname{Div} \hat{\mathbb{C}}$ та їхні степені $\deg(\omega_1)$ та $\deg(\omega_2)$.

Вправа 34. Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ комплексний тор.

1) Знайти нетривіальну голоморфну диференціальну форму ω_0 на X. Обчислити відповідний дивізор (ω_0).

2) Нехай ω довільна голоморфна диференціальна форма на X. Тоді $\omega = f\omega_0$ для деякої мероморфної функції f. Зробіть висновок, що f має бути голоморфною функцією.

3) Прийдіть до висновку, що $\Omega_X(X) = \mathbb{C} \cdot \omega_0$, тобто векторний простір породжений формою ω_0.

4) Показати, що рід X дорівнює 1.

5) Обчислити рід X, використовуючи інший метод: обчисліть степінь канонічного дивізора й використайте формулу Рімана-Роха.

Вправа 35. 1) Нехай X компактна Ріманова поверхня роду g. Нехай $p \in X$ й нехай $D = (g+1)p$. Застосуйте формулу Рімана-Роха до D й отримайте $l(D) \geqslant 2$. останнє означає, що існує нестала мероморфна функція $f \in \mathcal{L}(D)$.

2) Оцініть степінь відповідного голоморфного відображення $X \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathbb{C}}$?

3) Зробити висновок, що кожна компактна Ріманова поверхня роду 0 ізоморфна до $\hat{\mathbb{C}}$.

Вправа 36. 1) Нехай $X_2 \subset \mathbb{P}_2$ топологічний підпростір

$$X_2 = \{\langle z_0, z_1, z_2 \rangle \in \mathbb{P}_2 \mid z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0\}.$$

Показати, що X_2 підмноговид у $\mathbb{P}_2$, тобто Ріманова поверхня. Розгляньмо відображення

$$X_2 \xrightarrow{f} \hat{\mathbb{C}}, \quad \langle z_0, z_1, z_2 \rangle \mapsto \frac{z_1}{z_2},$$

де $\frac{a}{0}$ вважається рівним ∞. Показати, що це голоморфне відображення Ріманових поверхонь. Застосувати формулу Рімана-Гурвіца та обчислити рід X_2. Зробити висновок, що X_2 ізоморфна до Ріманової сфери.

Підказка: *Обчислити число точок у прообразі* $f^{-1}(p)$ *для кожної* $p \in \hat{\mathbb{C}}$. *Використовуючи, що може бути лише скінченна кількість точок розгалудження, знайти ці точки розгалудження й відповідні кратності та обчислити* $d(f)$.

2) Узагальнити обчислення на випадок

$$X_d = \{\langle z_0, z_1, z_2\rangle \in \mathbb{P}_2 \mid z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0\}, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Чому дорівнює рід X_d?

10. Лекція 10

10.1. **Перші наслідки з теореми Рімана-Роха.** Розгляньмо деякі наслідки з теореми Рімана-Роха.

Наслідок 10.1. *На кожній компактній Рімановій поверхні X існує нестала мероморфна функція $f \in \mathcal{M}_X(X)$.*

Доведення. Нехай $p \in X$ довільна точка, візьмімо $D = (g+1)\cdot p$. Тоді $l(D) \geqslant g+1+1-g = 2$. Це означає, що розмірність простору Рімана-Роха $\mathcal{L}(D)$ щонайменше 2. Отже, цей простір має містити несталу мероморфну функцію. ☐

Спостереження. *Візьмімо $f \in \mathcal{L}(D)$ як вище. Єдина точка, яка може бути полюсом цієї мероморфної функції, це p. Її кратність щонайбільше $g+1$, тому степінь відпосідного голоморфного відображення $X \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathbb{C}}$ не перевищує $g+1$.*

Наслідок 10.2. *Кожна компактна Ріманова поверхня роду 0 ізоморфна до $\hat{\mathbb{C}}$*

Доведення. Як щойно вище, ми отримуємо голоморфне відображення $X \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathbb{C}}$ степеня 1, яке повинно бути ізоморфізмом (див. Теаорему 4.4 та Наслідок 4.2). ☐

10.2. **Деякі факти про покриття.**

Означення 10.3. Неперервне відображення топологічних просторів $X \xrightarrow{f} Y$ називається покриттям, якщо для кожного $y \in Y$ існує відкритий окіл U точки y, такий що $f^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i$ та $f|_{V_i} : V_i \to U$ гомеоморфізм.

Спостереження. *Якщо Y Ріманова поверхня та $X \xrightarrow{f} Y$ покриття, тоді існує єдина комплексна структура на X, така що f голоморфне відображеняя.*

Доведення. Вправа. ☐

Таким чином кожне покриття Ріманової поверхні є локально біголоморфним відображенням.

Зауваження 10.4. Не кожне локально біголоморфне відображення є покриттям. Наприклад, візьмімо $X = B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $Y = \mathbb{C}$. Тоді природне включення $X \subset Y$ локально біголоморфне, але не є покриттям.

Факт. *Кожне локально біголоморфне відображення Ріманових поверхонь є покриттям.*

Доведення. Використати аргументацію аналогічну до аргументаціїї з доведення Теореми 5.5. ☐

Означення 10.5. Нехай $\widetilde{X} \xrightarrow{f} X$ покриття Ріманових поверхонь. Тоді воно називається універсальним покриттям, якщо $\widetilde{X}$ однозв'язна, тобто якщо $\pi_1(\widetilde{X}) = 0$.

Твердження 10.6. *1) Універсальне покриття існує для кожної Ріманової поверхні.*

2)(Універсальна властивість): $\widetilde{X} \xrightarrow{f} X$ є універсальним покриттям тоді і лише тоді, коли для кожного покриття $Y \xrightarrow{g} X$ та кожного вибору точок $x_0 \in X$, $y_0 \in g^{-1}(x_0)$, $\widetilde{x}_0 \in f^{-1}(x_0)$ існує єдине голоморфне відображення $\widetilde{X} \xrightarrow{h} Y$ із $h(\widetilde{x}_0) = y_0$, таке що $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & & \widetilde{x}_0 \arrow[dl, mapsto, "h"'] \arrow[d, mapsto, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"] & X\ , & y_0 \arrow[r, mapsto, "g"] & x_0
\end{tikzcd}$$

Доведення. Топологія. ☐

Приклад 10.7. Для решітки $\Gamma \subset \mathbb{C}$ відображення проекції $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Gamma$, $z \mapsto [z]$, є універсальним покриттям комплексного тора $\mathbb{C}/\Gamma$.

10.3. **Морфізми комплексних торів.** Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ та $Y = \mathbb{C}/\Gamma'$ два комплексних тори. Нащою метою є описати усі голоморфні відображення $X \to Y$.

Нагадування 10.8. Нагадаймо (див. Приклад 2.8), що для $\alpha \in \mathbb{C}^*$ із $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ ми маємо голоморфне відображення

$$X \to Y, \quad [z] \mapsto [\alpha \cdot z].$$

Нехай $X \xrightarrow{f} Y$ довільне нестале голоморфне відображення. Тоді за формулою Рімана-Гурвіца (Theorem 9.17), ми робимо висновок, що f не має точок розгалудження. Отже це має бути покриття.

Зауважмо, що канонічні відображення $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Gamma$, $z \mapsto [z]$, та $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{C}/\Gamma'$, $z \mapsto [z]$, є покриттями й навіть універсальними покриттями. Тоді за універсальною властивістю універсальних покриттів існує голоморфне відображення $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, таке що $\pi' \circ F = f \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi'"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd} \tag{10.1}$$

Розгляньмо тепер для фіксованого $\gamma \in \Gamma$ функцію $\Phi_\gamma(z) = F(z+\gamma) - F(z)$. Із комутативності діаграми (10.1) мо отримуємо $\Phi_\gamma(z) \in \Gamma'$ для кожного $z \in \mathbb{C}$. Оскільки Φ_γ неперервна, існує $\gamma' \in \Gamma'$, така що $\Phi_\gamma(z) = \gamma'$ для кожного $z \in \mathbb{C}$. Отже $\Phi'_\gamma(z) = 0$ і тому $F'(z+\gamma) - F'(z) = 0$. Це означає, що F' подвійно періодична (еліптична) голоморфна функція на $\mathbb{C}$, тому вона має бути сталою, тобто існує $a \in \mathbb{C}$, таке що $F'(z) = a$ для усіх $z \in \mathbb{C}$. Звідси випливає $F(z) = az + b$ для деяких $a, b \in \mathbb{C}$. Тому $f([z]) = [az] + [b]$. Це може бути коректно визначеним, лише якщо для кожного $\gamma \in \Gamma$ виконується $f([z+\gamma]) = f([z])$, звідки випливає $a\Gamma \subset \Gamma'$.

З іншого боку, ми бачимо, що для кожного вибору $a, b \in \mathbb{C}$, так що $a\Gamma \subset \Gamma'$, відображення

$$X \to Y, \quad [z] \mapsto [az] + [b]$$

голоморфне. Воно може бути представлене як композиція відображення

$$X \to Y, \quad [z] \mapsto [az]$$

із автоморфізмом $Y = \mathbb{C}/\Gamma'$

$$Y \to Y, \quad [z] \mapsto [z] + [b].$$

Ми отримали наступне.

Твердження 10.9. *Кожне голоморфне відображення комплексних торів* $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma'$ *може бути представлене як композиція голоморфного відображення*

$$\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma', \quad [z] \mapsto [az], \quad a \in \mathbb{C}, \quad a\Gamma \subset \Gamma',$$

та ізоморфізма

$$\mathbb{C}/\Gamma' \to \mathbb{C}/\Gamma', \quad [z] \mapsto [z] + [b], \quad b \in \mathbb{C}.$$

10.4. **Класи ізоморфності комплексних торів.** Нехай $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ решітка у $\mathbb{C}$. Нехай $\Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Тоді $\omega_1\Gamma' = \Gamma$ та

$$\mathbb{C}/\Gamma' \to \mathbb{C}/\Gamma, \quad [z] \mapsto [\omega_1 z]$$

ізоморфізм комплексних торів.

Отже, вивчаючи комплексні тори із точністю до ізоморфізма, достатньо розглядати лише решітки

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau, \quad \operatorname{Im} \tau \neq 0.$$

Більше того, якщо $\operatorname{Im} \tau < 0$, тоді $\operatorname{Im} \tau^{-1} > 0$ і $\tau(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau^{-1}) = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$, отже решітки $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau^{-1}$ та $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ визначають ізоморфні тори. Отже достатньо розглядати лише решітки

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau, \quad \operatorname{Im} \tau > 0.$$

Позначення. Нехай $\mathbb{H}$ позначає верхню напівплощину $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$.

Для $\tau \in \mathbb{H}$ позначмо $\Gamma(\tau) := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$.

Нехай тепер $\Gamma_1 = \Gamma(\tau_1) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau_1$, $\Gamma_2 = \Gamma(\tau_2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau_2$. Припустімо, що вони визначають ізоморфні тори $\mathbb{C}/\Gamma_1 \cong \mathbb{C}/\Gamma_2$. Тоді ізоморфізм даний за допомогою відображення $[z] \mapsto [az]+[b]$. Оскільки відображення переносу $[z] \mapsto [z]+[b]$ є ізоморфізмом, відображення $[z] \mapsto [az]$ має бути ізоморфізмом також. Отже має виконуватись $a\Gamma_1 = \Gamma_2$ (див. Приклад 2.8).

Зокрема, це означає, що $a \cdot \tau_1$ та $a \cdot 1$ належать до Γ_2. Запишімо

$$a\tau_1 = \alpha\tau_2 + \beta, \quad a = \gamma\tau_2 + \delta, \quad \alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Іншими словами

$$a \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, оскільки рівність $a\Gamma_1 = \Gamma_2$ еквівалентна до $a^{-1}\Gamma_2 = \Gamma_1$, ми робимо висновок, що

$$a^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

для деякої цілочисельної матриці $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$.

Маємо

$$\begin{pmatrix}\tau_2\\1\end{pmatrix} = aa^{-1}\begin{pmatrix}\tau_2\\1\end{pmatrix} = \left(a\cdot(a^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\tau_2\\1\end{pmatrix})\right) =$$

$$a\cdot\left(\left(\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tau_1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot(a\cdot\begin{pmatrix}\tau_1\\1\end{pmatrix}) =$$

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tau_2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11}\tau_2 + c_{12}\\ c_{21}\tau_2 + c_{22}\end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

Тому із рівностей $\tau_2 = c_{11}\tau_2 + c_{12}$ та $1 = c_{21}\tau_2 + c_{22}$ отримуємо

$$\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

що означає, що $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ обернені одна до одної цілочисельні матриці. Тому їхні детермінанти дорівнюють 1 або -1.

Оскільки $\tau_1 = \dfrac{a\tau_1}{a} = \dfrac{\alpha\tau_2+\beta}{\gamma\tau_2+\delta}$, маємо

$$\tau_1 = \frac{\alpha\tau_2+\beta}{\gamma\tau_2+\delta} = \frac{(\alpha\tau_2+\beta)(\gamma\bar{\tau}_2+\delta)}{|\gamma\tau_2+\delta|^2} = \frac{\alpha\gamma|\tau_2|^2+\beta\delta+\alpha\delta\tau_2+\beta\gamma\bar{\tau}_2}{|\gamma\tau_2+\delta|^2}.$$

Тому

$$\operatorname{Im}\tau_1 = \frac{1}{|\gamma\tau_2+\delta|^2}\cdot(\alpha\delta-\beta\gamma)\operatorname{Im}\tau_2 \tag{10.2}$$

Оскільки $\operatorname{Im}\tau_1 > 0$ та $\operatorname{Im}\tau_2 > 0$, отримуємо $\alpha\delta-\beta\gamma = \det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} > 0$ і отже $\det\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) = 1$. Ми показали, що $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Отже, якщо Γ_1 та Γ_2 визначають ізоморфні тори, тоді $\tau_1 = \dfrac{\alpha\tau_2+\beta}{\gamma\tau_2+\delta}$ для $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

З іншого боку, якщо $\tau_1 = \dfrac{\alpha\tau_2+\beta}{\gamma\tau_2+\delta}$ для $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, тоді $a\Gamma_1 = \Gamma_2$ для $a = \gamma\tau_2+\delta$. Ми отримали наступний результат.

Теорема 10.10. *Дві решітки* $\Gamma(\tau_1)$ *та* $\Gamma(\tau_2)$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$, *визначають ізоморфні комплексні тори тоді і лише тоді, коли*

$$\tau_1 = \frac{\alpha\tau_2+\beta}{\gamma\tau_2+\delta}$$

для $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Іншими словами, якщо визначити дію групи $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *на* $\mathbb{H}$ *за допомогою*

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\cdot\tau = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

множина орбіт $\mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ *цієї дії може розглядатися як множина класів ізоморфності комплексних торів.*

10.5. **Вправи.**

Вправа 37. Нехай $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\cdot\tau$, $\tau \in \mathbb{C}$, решітка у $\mathbb{C}$. Нехай n натуральне число й нехай $\Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\cdot(n\tau)$. Покладімо $X = \mathbb{C}/\Gamma$ та $X' = \mathbb{C}/\Gamma'$ й розгляньмо відображення

$$X \to X', \quad [z] \mapsto [nz].$$

Ми знаємо, що це голоморфне відображення Ріманових поверхонь. Довести, що це покриття. Обчисліть число точок у шарах цього покриття?

Вправа 38. Нехай $\widetilde{X} \xrightarrow{f} X$ універсальне покриття Рімановогї поверхні X.

1) Покажіть, що наступне твердження невірне:

Для кожного покриття $Y \xrightarrow{g} X$ існує голоморфне відображення $\widetilde{X} \xrightarrow{h} Y$ з $f \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd} .$$

Підказка: *У якості g розглянути тотожне відображення $X \to X$ на компактній Рімановій поверхні X із некомпактним універсальним покриттям.*

2) Знайти дві неізоморфні компактні Ріманові поверхні із неізоморфними універсальними покриттями.

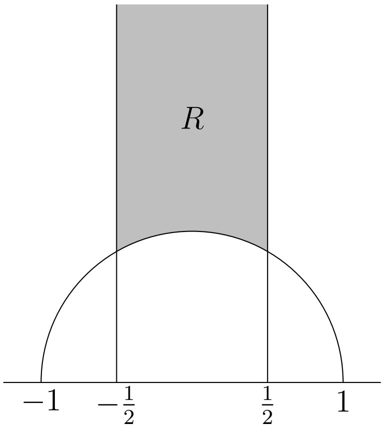
Вправа 39. У лекції ми представили групу $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ як групу перетворень верхньої напівплощини $\mathbb{H}$, які мають форму

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

(1) Показати, що ця група перетворень породжується перетвореннями

$$\tau \mapsto \tau + 1 \quad \text{та} \quad \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}.$$

(2) Нехай $R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}\}$.



Що є образом R відносно твірних групи із першої частини цієї вправи?

Вправа 40. Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$ та нехай $\mathbb{C}/\Gamma$ відповідний комплексний тор. У лекції ми показали, що автоморфізми X мають форму

$$[z] \mapsto [az] + [b], \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \cdot \Gamma = \Gamma.$$

Нехай $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$ позначає підгрупу у групі усіх автоморфізмів $\mathbb{C}/\Gamma$, що складається із автоморфізмів $\mathbb{C}/\Gamma \xrightarrow{f} \mathbb{C}/\Gamma$, таких що $f([0]) = [0]$, тобто

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma) = \{\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma, [z] \mapsto [az] \mid a \in \mathbb{C}, a \cdot \Gamma = \Gamma\}.$$

(0) Показати, що з $a \cdot \Gamma = \Gamma$ випливає $|a| = 1$.

(1) Обчислити $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(i)) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, де $\Gamma(i) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i$.

(2) Обчислити $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(\rho)) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, де $\Gamma(\rho) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \rho$, $\rho = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(3) Обчислити $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(\tau)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, де $\Gamma(\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$, для $\tau = 2i$ та $\tau = \frac{1}{2} + i$.

(4) Обчислити $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(\tau))$ для довільного $\tau \in F$.

11. Лекція 11

11.1. Простір (модулів) класів ізоморфності комплексних торів. У попередній лекції ми отримали опис класів ізоморфності комплексних торів.

Розгляньмо тепер фактор-відображення

$$\mathbb{H} \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad \tau \mapsto \text{орбіта } \tau.$$

Введімо на $\mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ фактор-топомогію, тобто підмножина $U \subset \mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ відкрита тоді і лише тоді, коли $\pi^{-1}U \subset \mathbb{H}$ відкрита.

Вправа. π локальний гомеоморфізм поза орбітами точок $i, \rho \in \mathbb{H}$, $\rho = \exp(\frac{2\pi}{3} \cdot i) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Це дозволяє запровадити структуру Ріманової поверхні на

$$(\mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})) \setminus \{\pi(i), \pi(\rho)\},$$

тобто на фактор-просторі без двох точок $\pi(i)$ та $\pi(\rho)$.

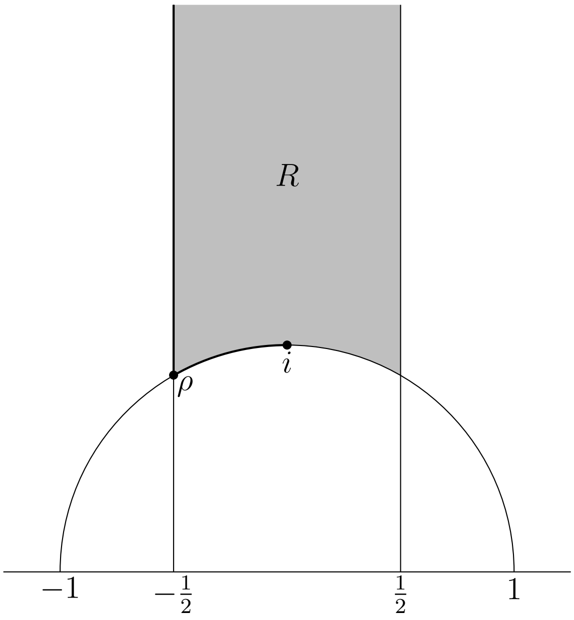
Зауваження 11.1. Зауважмо, що обмеження π на кожний окіл точки із орбіт i та ρ не може бути ін'єктивним. Це демонструє, що π не може бути локальним гомеоморфізмом навколо цих точок.

Візуалізуймо простір $\mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Нехай

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}\}$$

й нехай

$$F = R \cup \{z \mid \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}, |z| \geqslant 1\} \cup \{z \mid |z| = 1, -\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 0\}.$$



Вправа. Тоді обмеження π на F бієкція, тобто F може розглядатися як множина усіх класів ізоморфності комплексних торів.

Доведення сюр'єктивності. Нехай $\tau \in \mathbb{H}$. Покажімо, що існує $A \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$, так що $A \cdot \tau \in F$. Більше деталей можна знайти у [5].

Передусім зауважмо, що

$$\operatorname{Im}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\frac{1}{|c\tau+d|^2}\cdot\operatorname{Im}\tau,\quad \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Це забезпечує для фіксованого τ існування максимума

$$\max_{A\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\{\operatorname{Im}(A\cdot\tau)\}.$$

Тому існує $A_0\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, таке що $\tau_0=A_0\cdot\tau$

$$\operatorname{Im}\tau_0\geqslant\operatorname{Im}(A\cdot\tau),\quad \text{для кожного } A\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Оскільки $\operatorname{Im}(\tau_0+n)=\operatorname{Im}\tau_0$ для кожного $n\in\mathbb{Z}$, можемо припустити, можливо беручи $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot A_0$ замість A_0, що $|\operatorname{Re}\tau_0|\leqslant\frac{1}{2}$.

Оскільки $\operatorname{Im}\tau_0\geqslant\operatorname{Im}A\tau$ для кожного $A\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$, застосуймо це до матриці $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot A_0$. Маємо

$$\operatorname{Im}\tau_0\geqslant\operatorname{Im}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)A_0\cdot\tau)=\operatorname{Im}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot\tau_0)=\operatorname{Im}(-1/\tau_0)=\frac{\operatorname{Im}\tau_0}{|\tau_0|^2},$$

звідки випливає $|\tau_0|\geqslant 1$.

Якщо τ_0 не належить до F, тоді або $\operatorname{Re}\tau_0=\frac{1}{2}$, або ж $|\tau_0|=1$ та $0<\operatorname{Re}\tau_0\leqslant\frac{1}{2}$. Це легко виправити. А саме, якщо $\operatorname{Re}\tau_0=\frac{1}{2}$, тоді $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)A_0\cdot\tau=\tau_0-1\in F$; якщо ж $|\tau_0|=1$ та $0<\operatorname{Re}\tau_0\leqslant\frac{1}{2}$, тоді $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)A_0\cdot\tau=-1/\tau_0\in F$. □

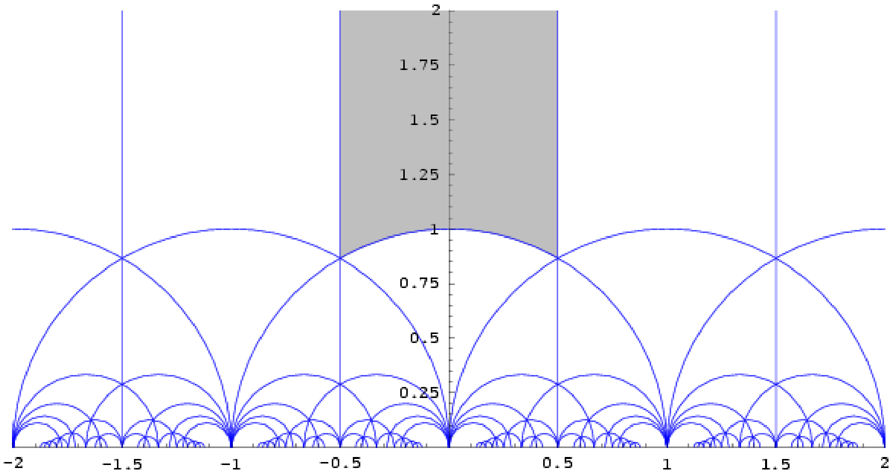


Рис. 1. Внутрішність кожної трикутної області (одна з вершин може лежати на “нескінченності”) є образом R під дією деякого елемента із $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

By Fropuff (from en wikipedia) [GFDL (`www.gnu.org/copyleft/fdl.html`) or CC-BY-SA-3.0 (`http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`)], via Wikimedia Commons.

11.2. **Автоморфізми комплексних торів.** Дослідімо тепер більш детально автоморфізми комплексних торів. За Твердженням 10.9 достатньо зрозуміти автоморфізми $\mathbb{C}/\Gamma\xrightarrow{f}\mathbb{C}/\Gamma$, такі що $f([0])=0$. Отже нехай $\operatorname{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$ позначає підгрупу у групі усіх автоморфізмів $\mathbb{C}/\Gamma$, що складається із автоморфізмів $\mathbb{C}/\Gamma\xrightarrow{f}\mathbb{C}/\Gamma$ із $f([0])=[0]$. Тоді, як вже згадано,

$$\operatorname{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma)=\{\mathbb{C}/\Gamma\to\mathbb{C}/\Gamma,[z]\mapsto[az]\mid a\in\mathbb{C},a\cdot\Gamma=\Gamma\}.$$

Автоморфізм із $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(\tau))$, $\tau \in \mathbb{H}$, даний матрицею $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, так що $\tau = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$. Точніше кажучи, автоморфізм заданий правилом

$$[z] \mapsto [az], \quad a = \gamma\tau + \delta.$$

Зауважмо, що з (10.2) випливає $|a| = 1$.

Якщо $\gamma = 0$, тоді це дає два різних автоморфізми $\mathbb{C}/\Gamma(\tau)$: тотожний автоморфізм $[z] \mapsto [z]$ та автоморфізм $[z] \mapsto -[z]$.

Аналізуючи випадок $\gamma \neq 0$, можна отримати наступне.

Факт. *Нехай $\tau \in F$. Якщо $\tau \neq i$ та $\tau \neq \rho$, тоді*

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(\tau)) = \{\pm\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}/\Gamma(\tau)}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Також має місце

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(i)) = \{\exp(k \cdot \frac{\pi}{2}) \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}/\Gamma(i)} \mid k = 0,1,2,3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma(\rho)) = \{\exp(k \cdot \frac{\pi}{3}) \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}/\Gamma(\rho)} \mid k = 0,1,2,3,4,5\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Доведення. Вправа. ☐

Зауваження 11.2. 1) Зауважмо, що група автоморфізмів Рімановой сфери $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ — це група перетворень

$$\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),$$

яка ізоморфна до фактора загальної лінійної групи $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ за підгрупою матриць $\{\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Цей фактор позначається $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Зауважмо, що $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ нескінченна група. Підгрупа $\mathrm{Aut}_0(\hat{\mathbb{C}})$ автоморфізмів, що зберігають $0 \in \hat{\mathbb{C}}$, складається із перетворень

$$\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad x \mapsto \frac{ax}{cx+d}, \quad \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Ця група також нескінченна.

2) Зауважмо, що незважаючи на те,що $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$ скінченна для кожної решітки Γ, повна група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Gamma)$ нескінченна.

3) Теорема Гурвіца про автоморфізми стверджує, що для компактної Рімановой поверхні X роду $g \geqslant 2$ група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(X)$ скінченна та

$$|\,\mathrm{Aut}(X)| \leqslant 84(g-1).$$

11.3. Веєрштрасова $\wp$-функція: приклад несталої мероморфної функції на комплексному торі.

Розгляньмо формулу Рімана-Роха із Теореми 9.15 для комплексного тора $X = \mathbb{C}/\Gamma$. Ми знаємо, що $g = g_X = 1$, тому $2g - 1 = 1$, і отже для кожного дивізора D on X із $\deg D > 0$ виконується $\deg D \geqslant 2g - 1$, та ми маємо

$$l(D) = \deg D + 1 - g = \deg D.$$

Зокрема, для $D = n \cdot [0]$ отримуємо

$$l(D) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0; \\ n, & \text{if } n \geqslant 1. \end{cases} \tag{11.1}$$

Це дає $l(2\cdot[0]) = 2$, тобто існує відмінна від константи мероморфна функція на X із єдиним полюсом у точці $[0]$ кратності 2.

Нагадування 11.3. Нагадаймо, що мероморфні функції на $\mathbb{C}/\Gamma$ знаходяться у взаємно однозначній відповідності із подвійно періодичними (еліптичними) мероморфними функціями на $\mathbb{C}$ відносно Γ (Теорема 3.1).

Отже має існувати еліптична функція на $\mathbb{C}$ відносно Γ із полюсами кратності 2 у точках решітки Γ.

Наївною спробою сконструювати таку функцію є узяти суму

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{1}{(z-\gamma)^2},$$

але ця сума нескінченна і не збігається у жодному сенсі. Однак, ця наївна здогадка може бути легко модифікована, щоб отримати шуканий приклад. Покладімо

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}).$$

Ця нескінченна сума є сумовною (про це можна прочитати (німецькою мовою) у [11]) і визначає еліптичну функцію $\mathbb{C}$ відносно Γ із полюсами кратності 2 у точках решітки Γ. Звичайно, ця функція залежить від даної решітки $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ або $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Щоб позначити цю залежність, ми використовуватимемо позначення

$$\wp(z) = \wp(z;\Gamma) = \wp(z;\omega_1,\omega_2) = \wp(z;\tau).$$

Означення 11.4. $\wp$ називається Веєрштрасовою $\wp$-функцією.

Похідна Веєрштрасової $\wp$-функції

$$\wp'(z) = -\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{2}{(z-\gamma)^3}$$

має полюси кратності 3 у точках решітки Γ, отже вона визначає мероморфну функцію на $\mathbb{C}/\Gamma$ із єдиним полюсом кратності 3 у точці $[0]$. Зауважмо, що функції $\wp(z)$ та $\wp'(z)$ лінійно незалежні. Тому із (11.1) випливає

$$\mathcal{L}([0]) = \mathbb{C}\cdot 1,\quad \mathcal{L}(2\cdot[0]) = \mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\cdot\wp(z),\quad \mathcal{L}(3\cdot[0]) = \mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\cdot\wp(z) + \mathbb{C}\cdot\wp'(z),$$

де, нехтуючи строгістю позначень, ми використовуємо однакові позначення для еліптичних функцій та відповідних мероморфних функцій на $\mathbb{C}/\Gamma$.

Комбінуючи $\wp(z)$ та $\wp'(z)$ одна з одною, ми легко отримуємо приклади мероморфних функцій із просторів $\mathcal{L}(n\cdot[0])$ для кожного $n\in\mathbb{N}$. Наприклад $\wp^2(z)\in\mathcal{L}(4\cdot[0])$, $\wp(z)\wp'(z)\in\mathcal{L}(5\cdot[0])$. Звичайно, можна також узяти похідні вищих порядків, тоді $\wp''(z)\in\mathcal{L}(4\cdot[0])$ і т. д.

Комбінуючи $\wp(z)$ та $\wp'(z)$ й використовуючи (11.1), ми легко обчислюємо $\mathcal{L}(4\cdot[0])$ та $\mathcal{L}(5\cdot[0])$.

Вправа. $\mathcal{L}(4\cdot[0]) = \mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\cdot\wp(z) + \mathbb{C}\cdot\wp'(z) + \mathbb{C}\cdot\wp^2(z)$, $\mathcal{L}(5\cdot[0]) = \mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\cdot\wp(z) + \mathbb{C}\cdot\wp'(z) + \mathbb{C}\cdot\wp^2(z) + \mathbb{C}\cdot\wp(z)\wp'(z)$.

Нехай тепер $n = 6$. Тоді $l(6 \cdot [0]) = 6$. З іншого боку усі функції

$$1, \quad \wp, \quad \wp', \quad \wp^2, \quad \wp\wp', \quad \wp^3, \quad (\wp')^2$$

належать до $\mathcal{L}(6 \cdot [0])$. Тому вони мають бути лінійно залежними. Це означає, що має існувати многочлен від двох змінних $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, із мономами $1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2$, такий що

$$f(\wp, \wp') = 0.$$

Знайдімо цей многочлен.

11.4. Алгебраїчне співвідношення між $\wp$ та $\wp'$.

Факт. *Веєрштрасова $\wp$-функція може бути представлена як*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)} \cdot z^{2n},$$

де коефіцієнти

$$G_m = \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \gamma^{-m}, \quad m \geqslant 3.$$

називаються рядами Ейзенштейна.

Доведення. Вправа. □

Ми обчислюємо

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots,$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots,$$

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - 24G_4 \frac{1}{z^2} - 80G_6 + \dots,$$

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + 9G_4 \frac{1}{z^2} + 15G_6 + \dots.$$

Тому

$$(\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) = -60G_4 \frac{1}{z^2} - 140G_6 + \dots,$$

$$(\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \dots,$$

що означає, що $(\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z)$ голоморфна, а значить стала функція, тобто

$$(\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6.$$

Ми отримали наступне твердження.

Твердження 11.5. *Нехай $g_2 = 60G_4$, $g_3 = 140G_6$. Покладімо*

$$f(x, y) = y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3.$$

Тоді $f(\wp, \wp') = 0$.

11.5. **Вправи.**

Вправа 41. 1) Показати, що Веєрштрасова $\wp$-функція відносно решітки $\Gamma \subset \mathbb{C}$ може бути представлена як

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2(n+1)} \cdot z^{2n},$$

де коефіцієнти

$$G_m = \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \gamma^{-m}, \quad m \geqslant 3.$$

Показати, що $G_m = 0$ для непарних m.

2) Показати, що $(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6$.

3) Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ комплексний тор, визначений решіткою Γ. Зауважмо, що за теоремою Рімана-Роха $l(4 \cdot [0]) = 4$. З іншого боку функції $1, \wp, \wp', \wp^2, \wp''$ належать до$\mathcal{L}(4 \cdot [0])$ (ми ототожнюємо подвійно періодичні функції на $\mathbb{C}$ з функціями на X). Зробіть висновок, що $1, \wp, \wp', \wp^2, \wp''$ лінійно залежні й знайдіть лінійне співвідношення поміж ними. Можете зробити це безпосередньо або ж використовуючи співвідношення

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6.$$

Вправа 42. Нехай $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ відображення проекції. Показати, що для кожного $\tau \in \mathbb{H}$ з орбіти i або ρ кожен відкритий окіл τ містить різні точки із тим самим образом відносно π.

Підказка: *Для малого* ϵ *розглянути у випадку* $\tau = i$ *пару чисел* $e^{i(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}$ *та* $e^{i(\frac{\pi}{2}-\epsilon)}$*; для* $\tau = \rho$ *розглянути пару* $e^{i(\frac{2\pi}{3}+\epsilon)}$ *та* $-1 + e^{i(\frac{\pi}{3}-\epsilon)}$.

Вправа 43. Розгляньмо для решітки $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ряди Ейзенштейна $G_4 = G_4(\Gamma) = \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \gamma^{-4}$, $G_6 = G_6(\Gamma) = \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \gamma^{-6}$. Нехай $\Gamma(\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$. Як і у лекції, позначмо $\rho = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Обчислити

$$G_4(\Gamma(\rho)) = 0, \quad G_6(\Gamma(i)) = 0.$$

Підказка: *Зауважте, що можна змінювати порядок додавання доданків у рядах Ейзенштейна.*

Для $\Gamma = \Gamma(\rho)$ *визначмо підмножину* $\Gamma' \subset \Gamma$ *як* $\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma = r \cdot e^{i\varphi}$ *із* $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{3}\}$. *Зауважити, що* Γ *може розглядатися як диз'юнктне об'єднання обертань* Γ'*, а саме як об'єднання множин* $e^{i\frac{\pi k}{3}} \cdot \Gamma'$*,* $k = 0, 1, \ldots, 5$. *Зауважити, що* $\sum_{k=0}^{5} e^{-4i\frac{\pi k}{3}} = 0$.

Для $\Gamma = \Gamma(i)$ *визначмо* $\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma = r \cdot e^{i\varphi}$ *with* $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}\}$. *Зауважити, що* Γ *диз'юнктне об'єднання* Γ'*,* $i\Gamma'$*,* $-\Gamma'$ *та* $-i\Gamma'$. *Використати* $\sum_{k=0}^{3} e^{-6i\frac{\pi k}{2}} = 0$.

Вправа 44. Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$ та нехай $\wp$ відповідна Веєрштрасова функція.

(1) Зауважте, що $\wp'(z)$, розглянута як мероморфна функція на $\mathbb{C}/\Gamma$, має єдиний полюс $[0]$ кратності 3. Скільки нулів може мати $\wp'(z)$? Використовуючи, що $\wp'$ еліптична й непарна функція, показати, що точки $[\frac{\omega_1}{2}]$, $[\frac{\omega_2}{2}]$, $[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}]$ є нулями $\wp'(z)$. Чи існують інші нулі $\wp'(z)$?

(2) Показати, що $\wp(z) = \wp(w)$ тоді й лише тоді, коли або $z = w \mod \Gamma$ або ж $z = -w \mod \Gamma$.

Підказка: *Для фіксованого* w *розглянути* $h(z) = \wp(z) - \wp(w)$ *й дослідити її множину нулів, використовуючи, що* $\wp(z)$ *парна функція. Скільки нулів може мати* $h(z)$*? Коли* $h(z)$ *може мати кратний нуль?*

12. Лекція 12

12.1. **Поля мероморфних функцій на комплексних торах.** Нашою наступною метою є визначити поле $\mathcal{M}_X(X)$ мероморфних функцій на комплексному торі X.

Ми ототожнюємо $\mathcal{M}_X(X)$ із полем еліптичних функцій на $\mathbb{C}$ відносно решітки Γ.

Нехай $f(z)$ еліптична функція, тоді

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)).$$

Позначмо $g(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ та $h(z) = \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$, тоді $f(z) = g(z) + h(z)$, $g(-z) = g(z)$ та $h(-z) = -h(z)$, тобто g парна, а h непарна. Це доводить наступне.

Факт. *Кожна еліптична функція на $\mathbb{C}$ є сумою парної еліптичної функції f із непарною еліптичною функцією h.*

12.1.1. *Парні еліптичні функції.* Нашим першим спостереженням є, що $\wp(z)$ парна.

Теорема 12.1. *Нехай $f(z)$ парна еліптична функція. Тоді існує раціональна функція від однієї змінної $\Phi(t) \in \mathbb{C}(t)$, така що $f = \Phi(\wp)$. Більше того, якщо полюси функції f містяться у Γ, тоді у якості Φ може бути узято многочлен.*

Доведення. Припустімо, що полюси f містяться у Γ. Розгляньмо Лоранів розклад f у точці 0. Оскільки f парна, маємо

$$f = \sum_{i > -n} a_{2i} z^{2i}.$$

Отже полюси f мають мати парну кратність. Розгляньмо головну частину f у 0:

$$a_{-2n} z^{-2n} + \cdots + a_{-1} z^{-2}.$$

Зауважмо, що Лоранів розклад $\wp(z)$ у нулі має форму

$$\frac{1}{z^2} + b_2 z^2 + b_4 z^4 + \ldots.$$

Його головна частина — це $\frac{1}{z_2}$. Ми робимо висновок, що головна частина $\wp^l(z)$ має форму

$$\frac{1}{z^{2l}} + \text{лінійна комбінація } \frac{1}{z^{2\nu}} \text{ з } \nu < l.$$

Тоді $f - a_{-2n}\wp^n(z)$ має полюси меншої кратності ніж f. Отже, за індукцією, отримуємо, що для деякий коефіцієнтів $\lambda_i \in \mathbb{C}$ функція $f - \sum_{i \geqslant 1}^n \lambda_i \wp^i$ голоморфна, отже стала, скажімо λ_0. Тоді

$$f = \sum_{i \geqslant 0}^n \lambda_i \wp^i = \Phi(\wp), \quad \Phi(t) = \sum_{i \geqslant 0}^n \lambda_i t^i.$$

Нехай тепер f довільна парна еліптична функція. По модулю решітки Γ, вона може мати лише скінченну кількість полюсів поза Γ. Нехай $p_1, \ldots, p_r$ — це відповідні представники усіх полюсів, які не належать до Γ. Тоді $\wp(z) - \wp(p_i)$ має нуль у p_1. Нехай ν_i — це кратність полюса p_i функції f. Тоді

$$h(z) = f \cdot \prod_{i=1}^r (\wp(z) - \wp(p_i))^{\nu_i}$$

не має полюсів поза решіткою Γ і тому існує многочлен $\Psi(t) \in \mathbb{C}[t]$, такий що $\Psi(\wp) = h(z)$. Тоді

$$f = \frac{h(z)}{\prod_{i=1}^{r}(\wp(z) - \wp(p_i))^{\nu_i}} = \frac{\Psi(\wp)}{\prod_{i=1}^{r}(\wp(z) - \wp(p_i))^{\nu_i}},$$

тобто $f = \Phi(\wp)$ для

$$\Phi(t) = \frac{\Psi(t)}{\prod_{i=1}^{r}(t - \wp(p_i))^{\nu_i}} \in \mathbb{C}(t).$$

Це завершує доведення. □

12.1.2. *Непарні еліптичні функції.* Зауважмо, що $\wp'(z)$ непарна. Нехай f довільна непарна еліптична функція. Тоді $\frac{f}{\wp'}$ є парною еліптичною функцією, отже існує $\Phi(t) \in \mathbb{C}(t)$, така що $f = \wp' \cdot \Phi(\wp)$. Зрештою мо отримуємо наступне твердження.

Теорема 12.2. *Нехай* $X = \mathbb{C}/\Gamma$ *комплексний тор. Нехай* $\wp(z) = \wp(z;\Gamma)$ *відповідна Веєрштрасова* $\wp$*-функція. Тоді* $\mathcal{M}_{\mathbb{C}/\Gamma}(\mathbb{C}/\Gamma) = \mathbb{C}(\wp) + \wp'(z)\mathbb{C}(\wp)$

Зауваження 12.3. Зауважмо, що доведення Теореми 12.2 конструктивне.

Наслідок 12.4. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}/\Gamma}(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \mathbb{C}(x)[y]/(y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3)$*, де* $g_2 = 60\sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\frac{1}{\gamma^4}$, $g_3 = 140\sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\frac{1}{\gamma^6}$

Доведення. Визначмо сюр'єктивний гомоморфізм

$$\mathbb{C}(x)[y] \to \mathcal{M}_{\mathbb{C}/\Gamma}(\mathbb{C}/\Gamma), \quad x \mapsto \wp(z), \quad \mapsto \wp'(z).$$

Тоді, за Твердженням 11.5, $y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3$ лежить у ядрі і ми отримуємо сюр'єкцію

$$\mathbb{C}(x)[y]/(y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3) \to \mathcal{M}_{\mathbb{C}/\Gamma}(\mathbb{C}/\Gamma).$$

Оскільки f незвідний многочлен над $\mathbb{C}(x)$, робимо висновок, що $\mathbb{C}(x)[y](y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3)$ поле. Оскільки відмінні від нуля гомоморфізми полів ін'єктивні, робимо висновок, що $\mathcal{M}_{\mathbb{C}/\Gamma}(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \mathbb{C}(x)[y]/(y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3)$. Це завершує доведення. □

12.2. **Комплексні тори як гладкі проективні алгебраїчні плоскі криві.** Нагадаймо, що комплексна площина

$$\mathbb{P}_2 = \{\langle x_0, x_1, x_2\rangle \mid (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\},$$

має структуру комплексного многовиду.

Означення 12.5. Плоска проективна крива C — це множина нулів однорідного многочлена $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$

$$C = Z(f) = \{\langle x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{P}_2 \mid f(x_0, x_1, x_2) = 0\rangle\}.$$

C називається гладкою, якщо вона є комплексним підмноговидом у $\mathbb{P}_2$ (у цьому випадку це Ріманова поверхня).

Факт. $C = Z(f) \subset \mathbb{P}_2$ *гладка тоді й лише тоді, коли*

$$Z(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}) = \{\langle x_0, x_1, x_2\rangle \in \mathbb{P}_2 \mid \frac{\partial f}{\partial z_i}(x_0, x_1, x_2) = 0, i = 0, 1, 2\}$$

пуста, тобто частинні похідні f *не мають спільних нулів у* $\mathbb{P}_2$.

Доведення. Вправа. □

Теорема 12.6. *Кожен комплексний тор* $\mathbb{C}/\Gamma$ *ізоморфний до гладкої проективної плоскої кубічної кривої. А саме,* $\mathbb{C}/\Gamma \cong Z(f)$, *де*

$$f = z_0z_2^2 - 4z_1^3 + g_2z_0^2z_1 + g_3z_0^3, \quad g_2 = 60\sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\frac{1}{\gamma^4}, \quad g_3 = 140\sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\frac{1}{\gamma^6}.$$

Ізоморфізм задається відображенням

$$\mathbb{C}/\Gamma \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_2, \quad [z] \mapsto \begin{cases} \langle 1, \wp(z), \wp'(z)\rangle, [z] \neq [0]; \\ \langle 0,0,1\rangle, [z] = [0]. \end{cases}$$

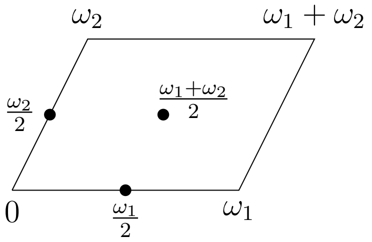
Доведення(ескіз). Нехай $C = Z(f)$. Із дискусії вище зрозуміло, що $\varphi(\mathbb{C}/\Gamma) \subset C$.

I. **Бієктивність** $\varphi : \mathbb{C}/\Gamma \to C$.

I.1. **Ін'єктивність.**

Лема 12.7. *1)* $\wp(z) = \wp(w)$ *тоді й лише тоді, коли або* $z = w \mod \Gamma$ *або ж* $z = -w \mod \Gamma$.

2) $\wp'(z) = 0$ *тоді й лише тоді, коли* $2z \in \Gamma$, *тобто існує три різних* $\mod \Gamma$ *нулі* $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$.



Отже, якщо $z, w \notin \Gamma$, такі що $\varphi(z) = \varphi(w)$, тоді $\wp(z) = \wp(w)$, $\wp'(z) = \wp'(w)$. Отже, або $w = z \mod \Gamma$ (і тому $[z] = [w]$) або ж $z = -w \mod \Gamma$ і $\wp'(z) = \wp'(-w) = -\wp'(w) = -\wp'(z)$. У другому випадку $2\wp'(z) = 0$, тому $\wp'(z) = 0$. Тому за Лемою 12.7 $2z \in \Gamma$ й зрештою $z = w \mod \Gamma$. Оскільки $\varphi([z]) \neq \langle 0,0,1\rangle$ для усіх $[z] \neq [0]$, робимо висновок, що φ ін'єктивна.

Зауваження 12.8. Зокрема, $\wp$ набуває різних значень у точках $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ (тобто у нулях $\wp'$). Покладімо $h(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$. Тоді оскільки $\wp'(z)^2 = h(\wp(z))$, маємо, що $\wp(\frac{\omega_1}{2}), \wp(\frac{\omega_2}{2}), \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ — це 3 різних нулі функції h, отже

$$h(x) = 4\left(x - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\cdot\left(x - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\cdot\left(x - \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right).$$

I.2 **Сюр'єктивність.** Зрозуміло, що $\langle 0,0,1\rangle \in \varphi(\mathbb{C}/\Gamma)$.

Візьмімо довільну точку $\langle 1,a,b\rangle \in C$. Оскільки $\wp$ набуває усіх значень, існує $z \in \mathbb{C}$ із $\wp(z) = a$. Оскільки $b^2 = \wp'(z)^2 = h(\wp(z)) = h(a)$, маємо $\wp'(z) = \pm b$. Якщо $\wp'(z) = b$, тоді $\varphi([z]) = \langle 1,a,b\rangle$. Якщо $\wp'(z) = -b$, тоді $\varphi([-z]) = \langle 1, \wp(-z), \wp'(-z)\rangle = \langle 1, \wp(z), -\wp'(z)\rangle = \langle 1,a,b\rangle$.

II. C **гладка крива у** $\mathbb{P}_2$ **(тобто підмноговид).** Дійсно, припустімо протилежне. Тоді існує $s = \langle s_0, s_1, s_2\rangle \in \mathbb{P}_2$, так що

$$\frac{\partial f}{\partial z_0}(s) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(s) = \frac{\partial f}{\partial z_2}(s) = 0.$$

Пряме обчислення показує, що звідси випливає

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 0.$$

З іншого боку, зауважмо, що Δ — це дискримінант многочлена $h(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$. Оскільки останній має 3 різних нуля, $\Delta \neq 0$, й ми отримуємо суперечність. Отже крива C гладка.

III. Із означення функції φ випливає, що вона неперервна. Зрозуміло, що φ голоморфна на $\mathbb{C}/\Gamma \setminus \{[0]\}$. За Теоремою 2.4 φ голоморфне відображення у $\mathbb{P}_2$. Його образ C є підмноговидом, отже $\varphi : \mathbb{C}/\Gamma \to C$ голоморфне відображення Ріманових поверхонь. Оскільки воно бієктивне, отримуємо, що φ — це ізоморфізм, що й завершує доведення. □

Означення 12.9. Гладкі проективні кубічні криві називаються еліптичними кривими. Таким чином, комплексні тори є еліптичними кривими.

12.3. **j-інваріант.** Ми визначили для $\tau \in \mathbb{H}$ константи $g_2 = g_2(\tau)$, $g_3 = g_3(\tau)$. Отже можна розглядати g_2 та g_3 як функції на $\mathbb{H}$. Ці функції є голоморфними на $\mathbb{H}$. Можна показати, що для $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$g_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^4 \cdot g_2(\tau), \quad g_3\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^6 \cdot g_3(\tau).$$

У цьому випадку говорять, що g_2 — це модулярна форма з вагою 4, а g_3 — це модулярна форма з вагою 6.

Тоді $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ має властивість

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau)$$

й ми кажемо, що Δ модулярна форма ваги 12. Ми показали вище, що $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, таким чином маємо голоморфну функцію на $\mathbb{H}$:

$$j(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Тоді

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau),$$

тобто j є інваріантною відносно дії групи $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ на $\mathbb{H}$.

Означення 12.10. Голоморфна функція $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ називається j-інваріантом.

Тому існує єдина факторизація через $\mathbb{H} \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}/\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, яка, нехтуючи строгістю позначень, теж позначається j.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C} \\
& \mathbb{H}/\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\exists!"] &
\end{tikzcd}$$

Теорема 12.11. *Відображення*

$$\mathbb{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{j} \mathbb{C}, \quad [\tau] \mapsto j(\tau)$$

біективне, тобто два комплексних тори $\mathbb{C}/\Gamma(\tau)$ *та* $\mathbb{C}/\Gamma(\tau')$ *ізоморфні тоді й лише тоді, якщо* $j(\tau) = j(\tau')$.

Доведення. Без доведення. Доведення можна знайти, наприклад, у [5]. ☐

Вправи.

Вправа 45. Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$, й нехай $\wp$ відповідна Веєрштрасова функція. Зауважмо, що еліптичні функції $\wp''''(z)$ та $\wp'(z) \cdot \wp'''(z)$ парні із полюсами у точках Γ. Представити ці функції як многочлени від $\wp$.

Вправа 46. Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$, й нехай $\wp$ відповідна Веєрштрасова функція. Зауважмо, що еліптичні функції $\wp'''(z)$ та $\wp^{(5)}(z)$ непарні. Записати їх як $\wp' \cdot \Psi(\wp)$ для деякого $\Psi(t) \in \mathbb{C}(t)$.

Вправа 47. У лекції ми показали, що

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}/\Gamma}(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \mathbb{C}(x)[y]/(y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3).$$

Знайти обернений елемент до y^3 у полі $\mathbb{C}(x)[y]/(y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3)$. Використати його, щоб виразити $(1/\wp'(z))^3$ як многочлен від $\wp'$ із коефіцієнтами у $\mathbb{C}(\wp)$.

Вправа 48. У лекції ми визначили j-інваріант

$$j(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad \Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27 g_3^2(\tau).$$

Обчислити наступні значення j-інваріанта:

$$j\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \quad j(i) = 1.$$

Іншими словами, показати, що

$$g_2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \quad g_3(i) = 0.$$

13. Лекція 13

13.1. **Інтегрування диференціальних форм.** Нехай $U \subset X$ відкрита підмножина Ріманової поверхні X. Нехай $\omega \in \Omega_X(U)$.

Нехай $\gamma : [a, b] \to U$ гладкий (тобто кусково диференційовний) шлях. Це означає, що для кожної карти $\varphi_i : U_i \to V_i$, $U_i \subset U$, функції $\varphi_i \circ \gamma : \gamma^{-1}(U_i) \to V_i$ є кусково диференційовними.

I. Припустімо, що існує карта $\varphi : W \to V$, $W \subset U$, така що $\gamma([a, b]) \subset W$. Запишімо $\omega|_W = f \cdot d\varphi$ для $f \in \mathcal{O}_X(W)$ й позначмо

$$\int\limits_\gamma \omega := \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot (\varphi(\gamma(t)))' dt.$$

Факт. *Це означення не залежить від вибору φ.*

Доведення. Вправа. ☐

II. Завжди можна обрати розбиття інтервала $[a, b]$, тобто

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b,$$

так щоб для $\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]} : [a_{i-1}, a_i] \to X$ існувала карта $\varphi_i : U_i \to V_i$ на X із $\gamma_i([a_{i-1}, a_i]) \subset U_i$. Визначмо тепер

$$\int\limits_\gamma \omega := \sum_{i=1}^m \int\limits_{\gamma_i} \omega.$$

Факт. *Це означення не залежить від вибору розбиття.*

Доведення. Вправа. ☐

Отже для кожної відкритої підмножини $U \subset X$, для кожної $\omega \in \Omega_X(U)$ та для кожного гладкого шляху $\gamma : [a, b] \to U$, маємо

$$\int\limits_\gamma \omega \in \mathbb{C}.$$

Зауваження 13.1. Аналогічно, для відкритої підмножини $U \subset X$, для $\omega \in \mathcal{K}_X(U)$ та для такого гладкого шляху $\gamma : [a, b] \to U$, що $\gamma([a, b])$ не містить полюсів ω, маємо $\int\limits_\gamma \omega$ також. Дійсно, достатньо замінити U множиною $U' = U \setminus \{\text{полюси } \omega\}$. Тоді $\omega \in \Omega_X(U')$ та $\gamma([a, b]) \subset U'$.

Властивості. I. Інваріантність відносно репараметризації. Нехай $[a', b'] \xrightarrow{\alpha} [a, b]$ гладке відображення, таке що $\alpha(a') = a$, $\alpha(b') = b$. Нехай $\gamma : [a, b] \to X$ гладкий шлях. Тоді $\gamma \circ \alpha : [a', b']$ гладкий шлях також і

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_{\gamma\circ\alpha} \omega.$$

II. Лінійність. $\int\limits_\gamma (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda \int\limits_\gamma \omega_1 + \mu \int\limits_\gamma \omega_2$ для диференціальних форм ω_1, ω_2, визначених навколо шляху γ, та для $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

III. Нехай $\gamma : [a,b] \to X$ гладкий шлях, нехай U відкритий окіл навколо $\gamma([a,b])$, нехай $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Нехай

$$\int\limits_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

IV. Нехай $\{\gamma_i\}_1^n$ розклад гладкого шляху γ, тобто $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$. Тоді

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} \omega.$$

V. Нехай γ^{-1} обернений шлях до гладкого шляху γ. Тоді

$$\int\limits_{\gamma^{-1}} \omega = -\int\limits_{\gamma} \omega.$$

Зауваження 13.2. Кожен неперервний шлях може бути наближений гладкими шляхами. Це дозволяє визначити інтеграли диференціальних форм вздовж довільних неперервних шляхів.

Теорема 13.3. *Нехай X Ріманова поверхня. Нехай $\omega \in \Omega_X(X)$. Нехай $\gamma \sim \delta$ два гомотопних шляхи. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\delta} \omega.$$

Доведення (підказка). Це наслідок із теореми Стокса. □

Наслідок 13.4. *Нехай X Ріманова поверхня, нехай $x_0 \in X$. Розгляньмо фундаментальну групу $\pi_1(X, x_0)$. Нехай $\omega \in \Omega_X(X)$, тоді*

$$\pi_1(X, x_0) \to \mathbb{C}, \quad [\gamma] \mapsto \int\limits_{\gamma} \omega$$

коректно визначений гомоморфізм груп.

Доведення. Відображення коректно визначене за попередньою теоремою. Нехай γ, δ два замкнених шляхи x_0. За властивістю (IV) інтегралів виконується

$$\int\limits_{\gamma\cdot\delta} \omega = \int\limits_{\gamma} \omega + \int\limits_{\delta} \omega.$$

Тому відображення $[\gamma] \mapsto \int\limits_{\gamma} \omega$ це гомоморфізм груп для кожного $\omega \in \Omega_X(X)$. □

Означення 13.5. Число $\int\limits_{\gamma} \omega$ називається періодом шляху γ відносно диференціальної форми ω. Гомоморфізм

$$\int\limits_{-} \omega : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{C}, \quad [\gamma] \mapsto \int\limits_{\gamma} \omega,$$

називається гомоморфізмом періодів.

Вправа. Обчислити періоди твірних $\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma)$ відносно деякого ω, що породжує $\Omega_{\mathbb{C}/\Gamma}(\mathbb{C}/\Gamma)$.

13.2. Лишки диференціальних форм.

Означення 13.6. Нехай $\omega \in \mathcal{K}_X(U)$ для деякої відкритої підмножини U Ріманової поверхні X. Нехай $a \in U$. Нехай $z : U' \to V$ локальна координата у точці a. Нехай $\omega|_{U'} = f dz$ для деякої $f \in \mathcal{M}_X(U')$. Визначмо

$$\operatorname{res}_a \omega := \operatorname{res}_{z(a)}(f \circ z^{-1}),$$

це число називається лишком диференціальної форми ω у точці a.

Нагадування 13.7. Нехай $U \subset \mathbb{C}$ відкрита, нехай $b \in U$, $f \in \mathcal{O}_X(U \setminus \{b\})$, й нехай

$$f(z) = \sum_i c_i (z-b)^i$$

його розклад Лорана у точці b. Тоді

$$\operatorname{res}_b f = c_{-1}.$$

Еквівалентно,

$$\operatorname{res}_b f = \frac{1}{2\pi i} \oint_b f dz.$$

Зауваження 13.8. Не має сенсу визначати лишки мероморфних функцій на Рімановій поверхні, оскільки це залежатиме від вибору локальних координат.

Факт. *Число $\operatorname{res}_a \omega$, визначене Означенні 13.6, не залежить від вибору локальних координат.*

13.3. Теорема про лишки.

Теорема 13.9 (Теорема про лишки). *Нехай X компактна Ріманова поверхня, нехай $\omega \in \mathcal{K}_X(X)$. Тоді*

$$\sum_{x \in X} \operatorname{res}_x \omega = 0.$$

Доведення (підказка). Випливає із теореми Стокса. ☐

Приклад 13.10. Нехай $f \in \mathcal{M}_X(X)$. Покладімо $\omega = \frac{df}{f}$. Теорема про лишки виглядає у цьому випадку як

$$\sum_{p \in X} \operatorname{res}_p \frac{df}{f} = 0.$$

Для кожного $p \in X$ оберімо локальну координату z у p та зобразімо f локально навколо p як $f = z^k \widetilde{f}$, де $\widetilde{f}$ голоморфна функція навколо p, така що $\widetilde{f}(p) \neq 0$ та $k = \operatorname{ord}_p f$. Тоді

$$df = (kz^{k-1}\widetilde{f} + z^k \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z})dz$$

і отже

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{k}{z} + \frac{\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z}}{\widetilde{f}} \right) dz.$$

Це означає, що $\operatorname{res}_p \frac{df}{f} = k = \operatorname{ord}_p f$, отже теорема про лишки набуває вигляд

$$\sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p f = 0,$$

що ми вже знаємо.

13.4. **Існування диференціальних форм із заданими головними частинами.**

Теорема 13.11. *Нехай* $S \subset X$ *скінченна множина. Для* $a \in S$ *нехай* U_a *відкритий окіл, такий що* $U_a \cap U_b = \emptyset$ *для* $a \neq b$. *Нехай* $\omega_a \in \mathcal{K}_X(U_a)$, *така що* $\omega_a \in \Omega_X(U_a \setminus \{a\})$. *Нехай* $\sum\limits_{a \in S} \operatorname{res}_a \omega_a = 0$. *Тоді існує* $\omega \in \mathcal{K}_X(X)$, *така що* S *є її множиною полюсів та* $\omega|_{U_a} - \omega_a \in \Omega_X(U_a)$.

Доведення. Без доведення. □

Зауваження 13.12. Це означає, що умова $\sum_{x \in X} \operatorname{res}_x \omega = 0$ із теореми про лишки є єдиною перепоною для існування диференціальних форм.

Наслідок 13.13. *На кожній компактній Рімановій поверхні* X *існує нестала мероморфна функція* $f \in \mathcal{M}_X(X)$.

Доведення. Для кожних двох різних точок $p_1, p_2 \in X$ існують диференціальні форми $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{K}_X(X)$, такі що p_1 є єдиним полюсом ω_1 із $\operatorname{ord}_{p_1} \omega_1 = -2$, а p_2 є єдиним полюсом ω_2 із $\operatorname{ord}_{p_2} \omega_2 = -2$. Тоді $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ для деякої $f \in \mathcal{M}_X(X)$. У цьому випадку f не може бути константою. □

Вправи.

Вправа 49. Розгляньмо решітку $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 5 + \mathbb{Z} \cdot (2 + 3i)$. Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ відповідний комплексний тор. Розгляньмо шлях $\gamma : [0, 1] \to X, \quad \gamma(t) = [(12 + 9i) \cdot t]$. Нехай ω стандартний твірний $\Omega_X(X)$, тобто для кожної карти $\varphi : U \to V$ виконується $\omega|_U = d\varphi$. Обчислити

$$\int\limits_\gamma \omega.$$

Вправа 50. Нехай $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ решітка у $\mathbb{C}$. Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ відповідний комплексний тор.

Визначмо $\delta_1 : [0, 1] \to X$ як $\delta_1(t) = [t \cdot \gamma_1]$ та $\delta_2 : [0, 1] \to X$ як $\delta_2(t) = [t \cdot \gamma_2]$. Зауважмо, що δ_1 та δ_2 гладкі замкнені шляхи у точці $[0] \in X$. Більше того, вони породжують фундаментальну групу X.

Нехай ω стандартний твірний $\Omega_X(X)$, тобто для кожної карти $\varphi : U \to V$ виконується $\omega|_U = d\varphi$. Обчислити інтеграли

$$\int\limits_{\delta_1} \omega \quad \text{та} \quad \int\limits_{\delta_2} \omega.$$

Вправа 51. Розгляньмо Ріманову сферу $\hat{\mathbb{C}}$. Нехай $z = \varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ та $w = \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ стандартні карти. Розгляньмо мероморфну функцію $f = \frac{z^3}{z^2-1}$ на $\hat{\mathbb{C}}$ й визначмо $\omega \in \mathcal{K}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}})$ за допомогою умови $\omega|_{U_0} = f dz$. Обчислити $\operatorname{res}_1 \omega$ та $\operatorname{res}_{-1} \omega$. Використати теорему про лишки, щоб отримати значення $\operatorname{res}_\infty \omega$.

Вправа 52. Нехай $D = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i$ головний дивізор на комплексному торі $X = \mathbb{C}/\Gamma$, тобто $D = (f)$ для деякої мероморфної функції $f \in \mathcal{M}_X(X)$. Показати, що

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i = 0$$

як елемент $X = \mathbb{C}/\Gamma$.

Підказка: Нехай $\pi : \mathbb{C} \to X$ канонічна проекція. Розглянути $F(z) = f \circ \pi(z)$. Обрати фундаментальний паралелограм V у $\mathbb{C}$ таким чином, що його межа ∂V не містить полюсів та нулів F. Розглянути інтеграл

$$\int\limits_{\partial V} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz$$

і застосувати стандартну теорему про лишки.

Теорема. *Для мероморфної функції g на відкритій підмножині $V \subset \mathbb{C}$, яка має неперервне продовження на замикання V й не має нулів та полюсів на межі ∂V, виконується рівність*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V} g(z) dz = \sum_{a \in V} \operatorname{res}_a g.$$

14. Лекція 14

14.1. Решітка періодів та Якобіан Рімановоï поверхні.

Означення 14.1. Нехай X компактна Ріманова поверхня, нехай

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p$$

деякі представники твірних фундаментальної групи $\pi_1(X)$ of X (див. Лекцію 4). Нехай $\omega \in \Omega_X(X)$, визначмо $A_i(\omega) = \int\limits_{\alpha_i} \omega$, $B_i(\omega) = \int\limits_{\beta_i} \omega$. Ми отримуємо лінійні відображення

$$\Omega_X(X) \xrightarrow{A} \mathbb{C}^p, \quad \omega \mapsto (A_1(\omega), A_2(\omega), \ldots, A_p(\omega)),$$

$$\Omega_X(X) \xrightarrow{B} \mathbb{C}^p, \quad \omega \mapsto (B_1(\omega), B_2(\omega), \ldots, B_p(\omega)).$$

Теорема 14.2. *A та B ізоморфізми векторних просторів. Зокрема це означає, що рід компактної Рімановоï поверхні збігається з числом p (“дірок у бублику” або “ручок у сфери”).*

Доведення. Без доведення. Доведення може бути виведене із теорії гармонічних функцій. ☐

Наслідок 14.3. *Нехай $\omega \in \Omega_X(X)$. Тоді*

$$\omega = 0 \quad \Leftrightarrow A_i(\omega) = 0 \ \forall i \quad \Leftrightarrow \ B_i(\omega) = 0 \ \forall i.$$

Означення 14.4. Зафіксуймо базис $\Omega_X(X)$, скажімо $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ (припустімо $g \geqslant 1$). Тоді для кожного замкненого шляху α у X у точці $x_0 \in X$ вектор

$$(\int\limits_{\alpha} \omega_1, \ldots, \int\limits_{\alpha} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$$

Називається періодом X відносно $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$.

Позначмо $L = L(\omega_1, \ldots, \omega_g) \subset \mathbb{C}^g$ множину усіх періодів X відносно $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$. Оскільки

$$\int\limits_{\alpha} \omega + \int\limits_{\beta} \omega = \int\limits_{\alpha \cdot \beta} \omega,$$

отримуємо, що L підгрупа у $\mathbb{C}^g$.

Розгляньмо довільний період $(\int\limits_{\alpha} \omega_1, \ldots, \int\limits_{\alpha} \omega_g)$. Оскільки $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_g], [\beta_1], \ldots, [\beta_g]$ породжують фундаментальну групу, $[\alpha]$ може бути виражений як добуток їхніх степенів. Тоді

$$(\int\limits_{\alpha} \omega_1, \ldots, \int\limits_{\alpha} \omega_g)$$

лінійна комбінація

$$(\int\limits_{\alpha_i} \omega_1, \ldots, \int\limits_{\alpha_i} \omega_g), \quad i = 1, \ldots, g, \quad \text{and} \quad (\int\limits_{\beta_j} \omega_1, \ldots, \int\limits_{\beta_j} \omega_g), \quad j = 1, \ldots, g,$$

із цілочисельними коефіцієнтами. Іншими словами,

$$(\int_\alpha \omega_1, \dots, \int_\alpha \omega_g)$$

є лінійною комбінацією із цілочисельними коефіцієнтами рядків так званої **матриці періодів**

$$\begin{pmatrix} A_1(\omega_1) & \dots & A_1(\omega_g) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_g(\omega_1) & \dots & A_g(\omega_g) \\ B_1(\omega_1) & \dots & B_1(\omega_g) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_g(\omega_1) & \dots & B_g(\omega_g) \end{pmatrix}.$$

Отже рядки матриці періодів породжують L як абелеву групу.

Ранг матриці періодів (над $\mathbb{C}$) дорівнює g. Більше того, можна показати, що її рядки лінійно незалежні над $\mathbb{R}$. Це означає, що L вільна комутативна підгрупа у $\mathbb{C}^g$ рангу $2g$, тобто є решіткою у $\mathbb{C}^g$.

Означення 14.5. Визначмо Якобіан Рімановоï поверхні X як

$$\mathrm{Jac}(X) := \mathbb{C}^g/L.$$

Запровадьмо комплексну структуру на $\mathrm{Jac}(X)$, аналогічно то того, як ми це зробили для одновимірних комплексних торів (стор. 1.14). Тоді $\mathrm{Jac}(X)$ комплексний многовид розмірності g.

Вправа. $\mathrm{Jac}(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \mathbb{C}/\Gamma$.

14.2. **Відображення Абеля-Якобі, зв'язок між дивізорами та Якобіанами.** Зафіксуймо точку $q \in X$ компактноï Рімановоï поверхні X. Для точки $x \in X$ візьмімо деякий шлях γ_x із q у x й розгляньмо

$$\left(\int_q^x \omega_1, \int_q^x \omega_2, \dots, \int_q^x \omega_g\right) := \left(\int_{\gamma_x} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_x} \omega_g\right).$$

Це елемент у $\mathbb{C}^g$. Звичайно, він залежить від вибору γ_x. З іншого ж боку, якщо δ_x інший шлях, що з'єднує q та x, для кожного $\omega \in \Omega_X(X)$

$$\int_{\gamma_x} \omega - \int_{\delta_x} \omega = \int_{\gamma_x} \omega + \int_{\delta_x^{-1}} \omega = \int_{\gamma_x \cdot \delta_x^{-1}} \omega,$$

де $\alpha_x = \gamma_x \cdot \delta_x^{-1}$ замкнений шлях із точки q. Отже

$$\left(\int_{\gamma_x} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_x} \omega_g\right) - \left(\int_{\delta_x} \omega_1, \dots, \int_{\delta_x} \omega_g\right) = \left(\int_{\alpha_x} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_x} \omega_g\right) \in L.$$

Таким чином відображення

$$\lambda_q : X \to \mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g/L, \quad x \mapsto [\left(\int\limits_q^x \omega_1, \ldots, \int\limits_q^x \omega_g\right)]$$

коректно визначене.

Більше того, це відображення голоморфне.

Вправа. Показати, що λ_q голоморфне.

Вправа. Показати, що для двох точок $q, q' \in X$, різниця відображень $\lambda_q - \lambda_{q'}$ є сталим відображенням $X \to \mathrm{Jac}(X)$.

Означення 14.6. Відображення λ_q називається відображенням Абеля-Якобі, яке відповідає точці $q \in X$.

Оскільки $\mathrm{Jac}(X)$ має природну структуру абелевої групи, ми можемо продовжити λ_q за лінійністю до гомоморфізму

$$\Lambda_q : \mathrm{Div}\, X \to \mathrm{Jac}\, X, \quad \sum_{x \in X} a_x \cdot x \mapsto \sum_{x \in X} a_x \cdot \lambda_q(x).$$

Зауваження 14.7. Λ_q залежить від вибору $q \in X$.

Розгляньмо його обмеження на підгрупу $\mathrm{Div}^0 X \subset \mathrm{Div}\, X$.

Факт.

$$\Lambda_q|_{\mathrm{Div}^0 X} : \mathrm{Div}^0 X \to \mathrm{Jac}\, X$$

не залежить від вибору q.

Доведення. Оскільки кожен $D \in \mathrm{Div}^0 X$ є сумою дивізорів вигляду $a - b$, $a, b \in X$, $a \neq b$, достатньо перевірити твердження для $D = a - b$, $a \neq b$. Тоді

$$\Lambda_q(D) = [(\int_q^a \omega_1, \ldots, \int_q^a \omega_g)] - [(\int_q^b \omega_1, \ldots, \int_q^b \omega_g)] =$$

$$[(\int_q^a \omega_1 - \int_q^b \omega_1, \ldots, \int_q^a \omega_g - \int_q^b \omega_g)] = [(\int_b^a \omega_1, \ldots, \int_b^a \omega_g)],$$

тобто не залежить від q. □

Означення 14.8. Визначмо $\Lambda := \Lambda_q|_{\mathrm{Div}^0 X}$ для деякого (кожного) $q \in X$.

Ми отримали гомоморфізм $\Lambda : \mathrm{Div}^0 X \to \mathrm{Jac}\, X$. Нагадаймо, що для $f \in \mathcal{M}_X(X)$, $(f) \in \mathrm{Div}^0 X$. Зауважмо, що з рівності $(f) = (g)$ для $f, g \in \mathcal{M}_X(X)$ випливає, що $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$. Отже, знати дивізор функції $f \in \mathcal{M}_X(X)$ це те саме, що знати f із точністю до множення на скаляр. Отже, описати $\mathcal{M}_X(X)$ — це те саме, що й описати $\mathrm{PDiv}\, X \subset \mathrm{Div}^0 X$.

14.3. Теорема Абеля-Якобі.

Теорема 14.9. *I. (Абель)* $\operatorname{PDiv} X = \operatorname{Ker} \Lambda$, *тобто дивізор* $D \in \operatorname{Div}^0 X$ *є дивізором деякої мероморфної функції* $f \in \mathcal{M}_X(X)$ $(D = (f))$ *тоді і лише тоді, коли* $\Lambda(X) = 0$. *Зокрема* $\operatorname{Pic}^0 X = \operatorname{Div}^0 X / \operatorname{PDiv} X$ *може розглядатися як підгрупа у* $\operatorname{Jac} X$ *за допомогою індукованого вкладення*

$$\operatorname{Pic}^0 X \to \operatorname{Jac} X, \quad [D] \mapsto \Lambda(D).$$

II. (Якобі) Λ *сюр'єктивне, зокрема*

$$\operatorname{Pic}^0 X \to \operatorname{Jac} X, \quad [D] \mapsto \Lambda(D).$$

є ізоморфізмом абелевих груп.

Доведення. Без доведення. ☐

Наслідок 14.10. $\lambda_q : X \to \operatorname{Jac} X$ *ін'єктивне для кожного* $q \in X$.

Доведення. Припустімо, що λ_q не є ін'єктивним. Тоді існують $a, b \in X$, $a \neq b$, із $\lambda_q(a) = \lambda_q(b)$. Тоді для $D = a - b$, $\Lambda(D) = \lambda_q(a) - \lambda_q(b) = 0$, отже існує $f \in \mathcal{M}_X(X)$ із $D = (f)$. Тоді f має степінь 1 як відображення Ріманових поверхонь $X \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathbb{C}}$. Отже $X \cong \hat{\mathbb{C}}$, що є суперечністю із нашим припущенням $g_X \geqslant 1$. ☐

14.4. Теорема Абеля-Якобі та одновимірні комплексні тори.

Наслідок 14.11. *Якщо* $g_X = 1$, *тоді* $\lambda_q : X \to \operatorname{Jac} X = \mathbb{C}/L$ *ізоморфізм, тобто комплексні тори є єдиними компактними Рімановими поверхнями роду* 1.

Доведення. λ_q є голоморфним ін'єктивним відображенням Ріманових поверхонь $X \to \mathbb{C}/L$, отже є сюр'єктивним і отже ізоморфізмом. ☐

Наслідок 14.12 (Теорема Абеля-Якобі для комплексних торів)**.** *Нехай* $X = \mathbb{C}/\Gamma$ *комплексний тор.*

(0) Тоді $\operatorname{Jac} X$ *можна ототожнити із* X.

(1) Нехай $D = \sum\limits_i a_i \cdot [x_i] \in \operatorname{Div} X$ *дивізор на* X, $a_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \mathbb{C}$. *Нехай* $D_{\mathbb{C}} = \sum\limits_i a_i x_i \in \mathbb{C}$. *Тоді при ототожненні* $\operatorname{Jac} X = X$, *відображення* $\Lambda : \operatorname{Div}^0 X \to \operatorname{Jac} X = X$ *задане за допомогою*

$$D \mapsto [D_{\mathbb{C}}] = D_{\mathbb{C}} + \Gamma \in X = \mathbb{C}/\Gamma.$$

Отже

$$\operatorname{Pic}^0 X \to X, \quad [D] \mapsto [D_{\mathbb{C}}],$$

є ізоморфізмом абелевих груп.

(2) Іншими словами, для $D \in \operatorname{Div}^0 X$ *існує* $f \in \mathcal{M}_X(X)$ *із* $D = (f)$ *тоді і лише тоді, коли* $D_{\mathbb{C}} \in \Gamma$.

Доведення. Вправа. ☐

14.5. Кілька заключних зауважень.

14.5.1. *Компактні Ріманові поверхні як проективні алгебраїчні многовиди.* Нехай X компактна Ріманова поверхня роду $g_X \geqslant 1$. Тоді $\operatorname{Jac} X$ може бути вкладений у $\mathbb{P}_n$ для деякого n. Тоді послідовність вкладень

$$X \subset \operatorname{Jac} X \subset \mathbb{P}_n$$

дає вкладення X у $\mathbb{P}_n$ як підмноговид.

Зауваження 14.13. Зауважмо, що не кожен багатовимірний комплексний тор може бути вкладений у деякий $\mathbb{P}_n$. Однак це так у випадку торів, які визначені за допомогою решіток періодів.

Означення 14.14. Проективний алгебраїчний многовид — це множина нулів однорідних многочленів $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$

$$Z(f_1, \dots, f_m) = \{\langle x_0, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{P}_n \mid f_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m\}.$$

Теорема 14.15 (Чоу)**.** *Компактні комплексні підмноговиди $\mathbb{P}_n$ є проективними алгебраїчними многовидами.*

Наслідок 14.16. *Кожна компактна Ріманова поверхня може бути представлена як проективний алгебраїчний многовид, тобто як проективна алгебраїчна крива.*

Зауваження 14.17. Нехай $C = Z(f) \subset \mathbb{P}_2$ гладка плоска алгебраїчна крива, $\deg f = d$. Тоді її рід дорівнює

$$g_C = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Зокрема, $g_C = 0$ для $d = 1$ та $d = 2$, $g_C = 1$ для $d = 3$, $g_C = 3$ для $d = 4$, $g_C = 6$ для $d = 5$. Таким чином ми бачимо, що не кожна компактна Ріманова поверхня може бути представлена як плоска алгебраїчна крива (наприклад, Ріманові компактні поверхні роду 2 не можуть бути плоскими).

Зауваження 14.18. Більше прикладів Ріманових поверхонь із різними родами наведено у Додатку А.

14.5.2. *Розмірність простору модулів.* У нашому курсі ми показали, що простір класів ізоморфності (так званий **простір модулів**) компактних Ріманових поверхонь роду

- $g = 0$ складається із однієї точки;
- $g = 1$ має розмірність 1 й може бути ототожнений із $\mathbb{C}$ (використовуючи j-інваріант).

Можна показати, що для $g \geqslant 2$, простір $\mathcal{M}_g$ класів ізоморфності компактних Ріманових поверхонь роду g має розмірність $3g - 3$.

Вправи.

Вправа 53. (1) Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$ та нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ відповідний комплексний тор. Зафіксуйте деякі твірні α_1 та β_1 фундаментальної групи X, зафіксуйте базис $\Omega_X(X)$ й обчисліть відповідну матрицю періодів. Можете скористатися результатами із Вправи 50.

(2) Нехай Γ решітка у $\mathbb{C}$ та нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ відповідний комплексний тор. Показати, що $\mathrm{Jac}(X) \cong X$.

Вправа 54. Нехай X компактна Ріманова поверхня роду $g \geqslant 1$. Нехай $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ базив $\Omega_X(X)$. Нехай $L \subset \mathbb{C}^g$ відповідна решітка періодів. Для фіксованої точки $q \in X$ ми сконструювали відображення

$$\lambda_q : X \to \mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g/L, \quad x \mapsto [(\int\limits_q^x \omega_1, \ldots, \int\limits_q^x \omega_g)].$$

Довести, що λ_q голоморфне відображення.

Підказка: Зауважте, що достатньо зрозуміти наступне.
(1) Нехай w точка у $\mathbb{C}$. Нехай f голоморфна функція у деякому відкритому околі W точки w. Тоді у кожній відкритій кулі U навколо w, $U \subset W$, для кожної точки $x \in U$ та для кожного шляху γ_x, що поєднує w та x у U, інтеграл

$$\int\limits_{\gamma_x} f dz$$

залежить лише від x і не залежить від вибору γ_x, отже позначення $\int\limits_w^x f dz := \int\limits_{\gamma_x} f dz$ має сенс.
(2) Більше того, існує відкрита куля U навколо w, де f має первісну функцію, тобто голоморфну функцію F, таку що $F'(z) = f(z)$. Тоді $\int\limits_w^x f dz = \int\limits_w^x F'(z)dz = F(x) - F(w)$, й тому функція

$$U \ni x \mapsto \int\limits_w^x f dz$$

голоморфна.

Вправа 55. Показати, що для двох точок $q, q' \in X$, різниця відображень $\lambda_q - \lambda_{q'}$ є сталим відображенням $X \to \mathrm{Jac}(X)$.

Вправа 56. Нехай $X = \mathbb{C}/\Gamma$ комплексний тор, $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2$. Нехай $D_1 = \left[\frac{\omega_1}{2}\right] + \left[\frac{\omega_2}{2}\right] - \left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right]$, $D_2 = \left[\frac{\omega_1}{2}\right] + \left[\frac{\omega_2}{2}\right] - 2 \cdot \left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right]$, $D_3 = \left[\frac{\omega_1}{2}\right] + \left[\frac{\omega_2}{2}\right] - 2 \cdot \left[\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right]$.

Перевірте, що D_1, D_2, D_3 є головними дивізорами.

Додаток А. Приклади компактних Ріманових поверхонь із різними родами

Для довільного $g \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ми наведемо приклад компактної Ріманової поверхні роду g.

А.1. Рід 0.

Ми знаємо, що, з точністю до ізоморфізму, існує лише одна компактна Ріманова поверхня роду 0. Це Ріманова сфера $\hat{\mathbb{C}}$ або ж проективна комплексна пряма $\mathbb{P}_1$.

А.2. Рід 1.

Ми знаємо, що єдиними компактними Рімановими поверхнями роду 1 є комплексні тори. Останні можуть розглядатися як плоскі проективні кубічні криві задані рівняннями

$$zy^2 = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3.$$

Іншими словами, комплексні тори є замиканнями у $\mathbb{P}_2$ афінних кривих $C \subset \mathbb{C}^2$,

$$C = \{(x, y) \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\},$$

де $\mathbb{C}^2$ вкладається у $\mathbb{P}_2$ за допомогою відображення

$$(x, y) \mapsto \langle x, y, 1\rangle.$$

Отже, можемо розглядати еліптичні криві як замикання у $\mathbb{P}_2$ афінних кривих вигляду

$$C = \{(x, y) \mid y^2 = h(x)\},$$

де h кубічний многочлен із трьома різними коренями.

Нагадування А.1. Зауважмо, що для многочлена $f \in \mathbb{C}[x, y]$ степеня d замикання афінної множини нулів

$$Z(f) = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

— це множина нулів гомогенізованого многочлена $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, що визначається як $F(x, y, z) = z^d \cdot f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Тобто

$$\overline{Z(f)} = Z(F) = \{\langle x, y, z\rangle \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

А.3. Узагальнюючи еліптичні криві.

Можна спробувати узагальнити конструкцію еліптичних кривих, щоб отримати приклади Ріманових поверхонь із вищими родами.

А.3.1. *Спроба прямого підходу.* Легко зауважити, що для многочлена $h \in \mathbb{C}[x]$ крива

$$C = \{(x, y) \mid y^2 = h(x)\} \subset \mathbb{C}^2$$

гладка (є підмноговидом у $\mathbb{C}^2$) тоді й лише тоді, коли усі корені h різні. нехай $h = c \cdot \prod_1^d (x - a_i)$, $d \geqslant 3$, із $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$.

Вкладімо $\mathbb{C}^2$ у $\mathbb{P}_2$ які вище за допомогою відображення $(x, y) \mapsto \langle x, y, 1\rangle$ та розгляньмо замикання $\bar{C}$ кривої C у $\mathbb{P}_2$. Тоді $\bar{C}$ визначається рівнянням

$$y^2z^{d-2} = c \cdot \prod_1^d (x - a_iz).$$

Ми бачимо, що $\langle 0, 1, 0\rangle$ є особливою точкою замикання $\bar{C}$, якщо $d > 3$, отже замикання у $\mathbb{P}_2$ гладкої афінної кривої у $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}_2$ не завжди дає підмноговид у $\mathbb{P}_2$, тобто $\bar{C}$ не завжди Ріманова поверхня. Ми бачимо, що у випадку рівняння $y^2 = h(x)$ цей підхід не працює для $d > 3$.

A.3.2. *Інший підхід.* Погляньмо на $\mathbb{C}^2$ як на добуток $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, тримаючи у пам'яті, що $\mathbb{C}$ може розглядатися, як відкрита щільна підмножина у $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}_1$. Це спонукає розглянути $\mathbb{C}^2$, як відкриту підмножину лінійного розшарування над $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}_1$.

Нагадування A.2. Лінійне розшарування над $\hat{\mathbb{C}}$ — це 2-вимірний комплексний многовид E разом із голоморфним відображенням $E \xrightarrow{\pi} \hat{\mathbb{C}}$, так що над стандартними відкритими картами U_0 та U_1 у $\hat{\mathbb{C}}$ обмеження $E|_{U_0} = \pi^{-1}(U_0)$ та $E|_{U_1} = \pi^{-1}(U_1)$ ізоморфні до $U_0 \times \mathbb{C}$ та $U_0 \times \mathbb{C}$ за допомогою ізоморфізмів ϕ_0 та ϕ_1 відповідно, так що $\pi|_{\pi^{-1}(U_0)} = pr_1 \circ \phi_0$ та $\pi|_{\pi^{-1}(U_1)} = pr_1 \circ \phi_1$ й відображення переходу (або відображення склейки, або ж коцикл)

$$(U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C} \xrightarrow{\phi_1 \phi_0^{-1}} (U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C}, \quad (x, v) \mapsto (x, g_{10}(x)(v))$$

дане у шарі над $x \in U_0 \cap U_1$ лінійним відображенням $g_{10}(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, тобто g_{10} може розглядатися, як голоморфне відображення $g_{10} : U_0 \cap U_1 \to \mathbb{C}^*$.

Зауважмо, що достатньо знати g_{10}, щоб реконструювати E із точністю до ізоморфізма.

Відомо, що, з точністю до ізоморфізма, E визначений за допомогою відображення склейки g_{10} вигляду $g_{10}(t) = t^n$ для деякого $n \in \mathbb{Z}$. Щоб зрозуміти це, достатньо розуміти, що кожен обертовний пучок на $\hat{\mathbb{C}}$ ізоморфний до $\mathcal{O}_{\hat{\mathbb{C}}}(D)$ для деякого дивізора $D \in \mathrm{Div}(\hat{\mathbb{C}})$ і цей ізоморфізм клас залежить лише від класу дивізора $[D] \in \mathrm{Pic}(\hat{\mathbb{C}})$ за Твердженням 7.1, Зауваженням 7.3 й Вправою 25.

Нехай E задане коциклом $g_{10}(t) = t^n$. Тоді E може бути склеєне із двох шматків $U_0 \times \mathbb{C}$ та $U_1 \times \mathbb{C}$, кожен з яких ототожнюється із $\mathbb{C}^2$. Склейка описується відображенням

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \cong (U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C} \xrightarrow{\phi_1 \phi_0^{-1}} (U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto (1/x, yx^n).$$

Тоді точка (x, y) відображається у $(\xi, \eta) = (1/x, yx^n)$. Оскільки $y^2 = h(x)$ та $x = 1/\xi$, маємо $y = \eta/x^n = \eta\xi^n$ і отже

$$\eta^2 \xi^{2n} = h(1/\xi) = \frac{1}{\xi^d} \cdot c \cdot \prod_1^d (1 - a_i \xi).$$

Зауважмо, що многочлен $g(\xi) = c \cdot \prod_1^d (1 - a_i \xi)$ не дорівнює нулю у точці 0 і має різні корені.

Якщо $\delta = 2n + d > 0$, тоді

$$\eta^2 \xi^\delta = g(\xi).$$

Крива у $\mathbb{C}^2$ визначена як

$$C_1 = \{(\xi, \eta) \mid \eta^2 \xi^\delta - g(\xi) = 0\}$$

гладка. Отже об'єднання $C_0 = C$ та C_1 є Рімановою поверхнею у E. Але, оскільки C_1 не містить точок вигляду $(0, \eta)$, C_1 міститься у C_0. Отже ця конструкція не додає точок до C_0 і тому не дає комактну Ріманову поверхню.

Якщо $\delta = 2n + d \leqslant 0$, тоді для $\epsilon = -\delta$

$$\eta^2 = \xi^\epsilon g(\xi).$$

Крива у $\mathbb{C}^2$ визначена як

$$C_1 = \{(\xi, \eta) \mid \eta^2 - \xi^\epsilon g(\xi) = 0\}$$

гладка тоді й лише тоді, коли многочлен $\xi^\epsilon g(\xi)$ не має кратних коренів, тобто, оскільки g має лише прості корені відмінні від нуля, тоді й лише тоді, коли $\epsilon = 0$ або $\epsilon = 1$. Нехай X об'єднання $C_0 = C$ та C_1. Тоді X Ріманова поверхня у E. Більше того, X компактна як об'єднання двох компактних множин

$$\{(x, y) \mid y^2 = h(x), |x| \leqslant 1\} \cup \{(\xi, \eta) \mid \eta^2 = \xi^\epsilon g(\xi)\}.$$

Ріманові поверхні цього типу називається гіпереліптичними кривими.

А.3.3. *Рід гіпереліптичних кривих.* Оскільки X сконструйована як підмноговид лінійного розшарування E над $\hat{\mathbb{C}}$, ми маємо природне голоморфне відображення

$$X \xrightarrow{\pi} \hat{\mathbb{C}}$$

яке дане над U_0 та U_1 за допомогою $(x, y) \mapsto x$ та $(\xi, \eta) \mapsto \xi$ відповідно.

Перш за все, обчіслімо степінь $X \xrightarrow{\pi} \hat{\mathbb{C}}$. Зауважмо, що для кожного $x \in U_0 \subset \hat{\mathbb{C}}$, такого що $h(x) \neq 0$, існує рівно 2 точки у прообразі $\pi^{-1}(x)$. Оскільки може бути лише скінченна кількість точок розгалудження, робимо висновок, що $d(\pi) = 2$.

Множина точок розгалудження співпадає із прообразами точок $x \in \hat{\mathbb{C}}$, таких що або $h(x) = 0$, якщо $x \in U_0$, або ж $\xi^\epsilon g(\xi) = 0$, якщо $x = 1/\xi \in U_1$. Існує d таких точок над U_0 та ще одна 1 точка над $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ у випадку $\epsilon = 1$, тобто якщо d непарне. Кратність кожної з точок розгалудження дорівнює 2, отже

$$\sum_{x \in X} (\operatorname{mult}_x \pi - 1) = d + \epsilon.$$

Нехай g позначає рід X. Застосуймо формулу Рімана-Гурвіца до нашого відображення. Маємо

$$2g - 2 = 2(-2) + d + \epsilon.$$

Тому $g = \frac{d+\epsilon}{2} - 1$, отже цим шляхом можемо отримати компактну Ріманову поверхню довільного роду $g \in \mathbb{N}$.

Зауваження А.3. Ми показали,що гіпереліптична крива X роду g визначена разом із голоморфним відображенням $\pi : X \to \hat{\mathbb{C}}$ степеня 2.

Можна показати, що обернене також є вірним: кожна компактна Ріманова поверхня роду g з голоморфним відображенням $\pi : X \to \hat{\mathbb{C}}$ степеня 2 ізоморфна до гіпереліптичної кривої.

Зауваження А.4. Гіпереліптична крива роду g й відповідне голоморфне відображення $X \to \hat{\mathbb{C}}$ визначають $2(g+1)$ точок на $\hat{\mathbb{C}}$ (образи точок розгалудження). Діючи за допомогою автоморфізмів на $\hat{\mathbb{C}}$, тобто за допомогою перетворень $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, завжди можемо припустити, що 3 із цих $2(g + 1)$ точок є, скажімо, точками $0, 1, \infty$. Тоді $2g - 1$ точки, що лишилися, параметризують класи ізоморфності гіпереліптичних кривих роду g. Більше того, різні набори $(2g-1)$-точок у $\hat{\mathbb{C}}$ дають різні класи ізоморфізму гіпереліптичних кривих.

Останнє означає, що підпростір гіпереліптичних кривих у просторі модулів $\mathcal{M}_g$ усіх компактних кривих роду g (див. стор. 79) має розмірність $2g-1$. Оскільки $\dim \mathcal{M}_g = 3g-3$ для $g \geqslant 2$, маємо, що корозмірність гіпереліптичного локусу у $\mathcal{M}_g$ дорівнює $g - 2$.

Отже, для $g \geqslant 3$ існують компактні Ріманові поверхні, які не є гіпереліптичними.

A.4. **Рід 2.** Щоб отримати гіпереліптичну Ріманову поверхню роду 2, має виконуватися $d + \epsilon = 6$, отже можемо можна узяти $d = 5$ або $d = 6$.

Зауваження A.5. Можна показати, що кожна компактна Ріманова поверхня роду 2 гіпереліптична. За Зауваженням A.3, достатньо показати існування голоморфного відображення $X \to \hat{\mathbb{C}}$ степеня 2, або ж, еквівалентно, достатньо знайти мероморфну функцію на X із двома полюсами.

A.5. **Вищі роди.** Як вже згадано вище, мають існувати негіпераліптичні Ріманові поверхні роду $g \geqslant 3$.

Приклад A.6. Нехай Y плоска проективна гладка крива степеня 4, наприклад

$$Y = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{P}_2 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 0\}.$$

Як ми знаємо, рід Y дорівнює 3. Але, Y не гіпереліптична.

Більш загально, гіпереліптична крива не може бути представлена як підмноговид у площині $\mathbb{P}_2$.

Зауваження A.7. Зауважмо, що X отримується із $C = C_0$ за допомогою додавання однієї точки якщо d непарне. У цьому випадку наша конструкція є одноточковою компактифікацією, й тому існує природний гомеоморфізм між X та $\bar{C}$.

Якщо d парне, X отримується із $C = C_0$ за допомогою додавання двох точок.

Зауваження A.8. Зауважмо, що замикання $C = C_0$ у $\mathbb{P}_2$ також є одноточковою компактифікацією. Але, як зазначено вище, $\bar{C}$ є підмноговидом $\mathbb{P}_2$ лише для $d \leqslant 3$. У випадку $d = 3$ рід X дорівнює 1 і наша одноточкова компактифікація X ізоморфна до $\bar{C}$.

Для $d > 3$, $\bar{C}$ особлива. Отже, хоча X та $\bar{C}$ гомеоморфні як топологічні простори, комплексна структура на X не індукована комплексною структурою на $\mathbb{P}_2$.

Лiтература

[1] Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann surfaces. 2nd ed.* New York etc.: Springer-Verlag, 2nd ed. edition, 1992.

[2] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces. Transl. from the German by Bruce Gilligan.* 1981.

[3] Eberhard Freitag. *Function theory 2. Riemann surfaces, several complex variables, abelian functions, higher modular forms. (Funktionentheorie 2. Riemannsche Flächen, mehrere komplexe Variable, Abelsche Funktionen, höhere Modulformen.).* Berlin: Springer, 2009.

[4] Eberhard Freitag. *Complex analysis 2. Riemann surfaces, several complex variables, Abelian functions, higher modular functions.* Berlin: Springer, 2011.

[5] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Function theory 1. (Funktionentheorie 1.) 4th corrected and expanded ed.* Berlin: Springer, 4th corrected and expanded ed. edition, 2006.

[6] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Complex analysis. Transl. from the German by Dan Fulea. 2nd ed.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2009.

[7] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry. 2nd ed.* New York, NY: John Wiley & Sons Ltd., 2nd ed. edition, 1994.

[8] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[9] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces.* Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, 1995.

[10] Martin Schlichenmaier. *An introduction to Riemann surfaces, algebraic curves and moduli spaces.* Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989.

[11] Günther Trautmann. Summierbarkeit und Konvergenz von Reihen. Lehrskript, TU Kaiserslautern, 8 Seiten.

E-mail: `o.g.yena@gmail.com`